УДК330.4:338.24:519.86

В.М. Кузниченко, канд. физ.-мат. наук, доц.,
В.И. Лапшин, д-р физ.-мат. наук, проф.

Харьковский институт финансов Украинского государственного университета финансов и международной торговли, г. Харьков, Украина, e-mail: kuznichenkovm@i.ua

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА В ЭКОНОМИКЕ

V.M. Kuznichenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
V.I. Lapshyn, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof

Kharkiv Institute of Finance of the Ukrainian State University of Finance and International Trade, Kharkiv, Ukraine,
e-mail: kuznichenkovm@i.ua

PROBABILISTIC APPROACH TO THE CONTINUOUS MODEL OF EXCHANGE IN THE ECONOMY

Цель. Построение бездефицитной модели обмена для непрерывных процессов с внешним управлением.

Методика. На основе теории цепей Маркова, методов преобразования Лапласа и Z-преобразования определяются матрицы интенсивностей и соответствующих им переходных матриц. Нахождение функций от матриц через многочлены осуществляется на основании теоремы Гамильтона-Кэли.

Результаты. Разработана методика построения бездефицитной модели обмена на основе теории цепей Маркова для непрерывных процессов с внешним управлением, при которой результаты непрерывной и дискретной моделей совпадают. Бездефицитная модель предполагает, что в процессе обмена и при выходе на стационарный режим его участники имеют нулевое сальдо. Управляющая сила в виде действия администрации за счёт перераспределения может корректировать результаты обмена между участниками процесса. Модель даёт возможность определять управляющую силу (влияние) для процессов реализации конкретной программы обмена.

Научная новизна. Ранее бездефицитная модель обмена на основе теории цепей Маркова с внешним управлением была разработана и использовалась только для дискретных процессов.

Практическаяое значимость. Модель может быть использована в различных экономических системах для изучения и планирования процессов обмена с учётом внешнего управления непрерывно во времени. Примерами таких систем могут быть линейная модель международной торговли, денежные и товарные потоки между исполнителями региональных бюджетных проектов. Дальнейшее развитие исследований предполагает построение дефицитной модели, в которой разделяют процессы поступления и передачи элементов обмена, что может привести для некоторых участников как к отрицательному, так и положительному сальдо.

Ключевые слова: *модель обмена, непрерывный процесс, внешнее управление, цепи Маркова*

Постановка проблемы. Для эффективного экономического развития стран необходимо качественное прогнозирование и планирование этих процессов, создание их динамических моделей, наиболее приближённых к описанию реальных событий, что невозможно без применения экономико-математических методов.

Влияние большого количества факторов на экономические системы (объекты) приводит к сложности моделирования их динамики из-за присутствия элементов случайности. Для описания таких процессов широко используется математическая теория случайных процессов, представленная в монографиях Ховарда Р.А., Кемени Дж., Снелл Дж., в [1–2] и научных публикациях других авторов.

При изучении сложных систем полезной математической моделью является марковский процесс. Основными для марковского процесса являются понятия состояние системы и переход из одного состояния в другое. Как отмечается в монографии Кемени Дж., Снелл Дж., существенное отличие вероятностного подхода состоит в том, что отпадает нужда в использовании теории собственных значений и собственных векторов, так как матричные выражения проще, чем обычно применяемые формулы, которые пишутся в терминах собственных значений, тем более, что фундаментальная матрица допускает прямую вероятностную интерпретацию в отличие от собственных значений.

Модель обмена, которая использует цепи Маркова, нашла применение для описания процессов международной торговли, распределения и контроля расходования средств между исполнителями бюджетных проектов, поведения денежных потоков в некоторой стране (регионе) [1–3]. Развитие моделей обмена, которые могут быть использованы и в других экономических системах, является актуальной задачей.

Выделение нерешённой проблемы. Непрерывная обобщённая модель без управления, включающая как бездефицитный, так и дефицитный случаи, была рассмотрена в работе [3]. Построение модели обмена для непрерывных процессов с внешним управлением позволит не только изучать, но и корректировать коллегиальным органом взаимодействие партнёров при выполнении международных торговых договоров или региональных проектов, процессы обмена в других замкнутых системах на протяжении всего процесса, получать информацию о состоянии системы в любой момент времени.

Анализ последних исследований. Хорошо известная дискретная линейная модель международной торговли (модель обмена) использует теорию собственных значений и собственных векторов. Дискретная с управлением и непрерывная без управления линейные обобщённые модели обмена на основе теории цепей Маркова, включающие как дефицитную, так и бездефицитную модели (на примерах моделей международной торговли и выполнения бюджетных проектов совместно рядом исполнителей), были предложены и исследовались в работах авторов, приведенных в монографии [3]. Заметим, что ряд приложений модели обмена, которая использует цепи Маркова, приведено в монографиях Ховарда Р.А, Кемени Дж., Снелл Дж., в [1–2].

Выделение ранее нерешённой проблемы. Отсутствие модели обмена для непрерывных во времени процессов с внешним управлением.

Формулирование цели работы. Целью настоящей статьи является построение бездефицитной модели обмена для непрерывных процессов с внешним управлением, которая включала бы дискретную модель и могла быть использована в различных замкнутых экономических системах.

Изложение основного материала. Напомним сначала бездефицитную дискретную модель с управлением, которая описывается следующим модельным рекуррентным уравнением с матрицей L переходных вероятностей для эргодических цепей Маркова [3]

$$\overline{p}(n+1) = \overline{p}(n)L + \overline{f}\,, \tag{1}$$

где $\overline{p}(n)$ – вектор распределения ресурсов (например, финансовых) между структурными единицами системы после n-того шага; $\overline{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ – вектор административного перераспределения (выравнивания) их ресурсов.

Для аналитического изучения поведения цепи Маркова до перехода в стационарное состояние применим метод z преобразований к (1), положив $\overline{p}(n) \longleftrightarrow P(z)$ [3]

$$\frac{P(z) - \overline{p}(0)}{z} = P(z)L + \frac{\overline{f}}{(1-z)}\,. \tag{2}$$

После очевидных преобразований (2) примет вид (3)

$$P(z) = (\overline{p}(0) + \frac{\overline{f}z}{(1-z)})(I - zL)^{-1}\,, \tag{3}$$

где I единичная матрица размера nxn, а $(I - zL)^{-1}$ – обратная матрица к матрице $(I - zL)$.

Обозначим через $H(n)$ обратное преобразование матрицы $(I - zL)^{-1}$

$$(I - zL)^{-1} \longleftrightarrow H(n)\,.$$

Матрицу $H(n)$ представим в виде суммы слагаемых

$$H(n) = S + T(n),$$

где S – стохастическая матрица, которая соответствует члену матрицы $(I - zL)^{-1}$ с множителем $\frac{1}{(1-z)}$. Это утверждение эквивалентно тому, что определитель матрицы $(I - zL)$ равняется 0 при $z = 1$. Стохастическая матрица S всегда имеет по крайней мере одно собственное значение равное 1. Более того, строки матрицы S будут равны между собой, и каждая из них будет вектором предельных (стационарных) вероятностей. Матрицу S называют стационарной матрицей.

Оставшиеся слагаемые матрицы $H(n)$, которые мы обозначили через $T(n)$, образуют переходную составляющую, так как они описывают поведение цепи Маркова в переходной период. Эти слагаемые являются матрицами, умноженными на коэффициенты вида $\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, ...$ и так далее. Естественно, что $|\alpha|$ <1, в противном случае, компоненты вектора вероятности неограниченно возрастали бы, что, очевидно, невозможно.

Матрицы $T(n)$ интересны еще и тем, что сумма слагаемых по каждой строке равна 0. Такие матрицы получили название дифференциальных матриц.

Пусть для определённости матрица L, которая определяется запланированными действиями (например, финансовыми) структурных единиц, имеет вид

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для аналитического изучения поведения цепей Маркова к переходу в стационарное состояние применяем метод Z-преобразований к уравнениям (1) и (3) (прямое и обратное преобразование) с матрицей (4), получаем выражение для вектора распределения ресурсов на каждом шаге процесса обмена. Находим матрицу $(I - zL)$

$$(I - zL) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{16}z & -\frac{9}{16}z \\ -\frac{3}{8}z & 1 - \frac{5}{8}z \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель этой матрицы и находим обратную матрицу $(I - zL)^{-1}$

$$\Delta = \det(I - zL) = (1 - z)(1 - \frac{z}{16});$$

$$(I - zL)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{8}z & \frac{9}{16}z \\ \frac{3}{8}z & 1 - \frac{7}{16}z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1 - z)}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{(1 - \frac{z}{16})}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Применяем z -преобразование к уравнению (1)

$$P(z) = \overline{p}(0)\left(\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{(1-\frac{z}{16})}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\right) +$$

$$+\overline{f}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{16}{15}\left(\frac{1}{(1-z)} - \frac{1}{(1-\frac{z}{16})}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\right).$$

Применяем обратное преобразование к $P(z)$ и находим решение уравнения (1)

$$\overline{p}(n) = \overline{p}(0)(\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{16}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}) +$$

$$+\overline{f}(n\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{16}{15}(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}), \qquad (5)$$

где $\overline{p}(0)$ – вектор начального распределения ресурсов в системе.

Напомним, что для того, чтобы процесс не расходился необходимо, чтобы для компонент вектора $\overline{f} = (f_1, f_2)$ выполнялось условие: $f_1 + f_2 = 0$.

В непрерывной модели обмена параметрами процесса будут интенсивности, а не вероятности переходов.

Обозначим через a_{ij} интенсивность перехода из состояния i в состояние j, когда $i \neq j$. Величины a_{ij} определяются следующим образом: за бесконечно малый интервал времени dt процесс, который находится в состоянии i, будет совершать переход в состояние j с вероятностью $a_{ij}dt \quad (i \neq j)$.

Теперь можно описать марковский процесс с непрерывным временем матрицей интенсивностей переходов A с компонентами a_{ij}, диагональные элементы которой должны быть доопределены (сумма всех компонент матрицы A по каждой строке должен равняться нулю).

Непрерывная бездефицитная модель описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t) = \overline{p}(t)A + \overline{f}, \qquad (6)$$

где $L = e^A$ или $A = \ln L$, а для вектора $\overline{f} = (f_1, f_2)$ выполнялось условие

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Матрица интенсивностей A находится стандартными методами на основании теоремы Гамильтона-Кэли и ее следствий [4]. Для этого найдем вначале матрицу A. Характеристический полином матрицы L имеет вид

$$\Delta_L(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{16} - \lambda & \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{16}).$$

Все корни характеристического полинома простые, поэтому характеристический полином совпадает с минимальным аннулирующим полиномом $\psi(\lambda) = \Delta_L(\lambda)$. Спектр матрицы L обозначим через Λ_L, который равен

$$\Lambda_L = \left\{\frac{1}{16};\ 1\right\}.$$

Функция $f(\lambda) = \ln(\lambda)$ определена на спектре матрицы L. Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы L и $g(\lambda)$ – любой многочлен, совпадающий с $f(\lambda)$ на спектре матрицы L (т.е. $f(\Lambda_L) = g(\Lambda_L)$), то по определению

$$f(L) = g(L).$$

Такой многочлен можно получить различными методами. В нашем случае многочлен $g(\lambda)$ наименьшей степени, однозначно определенный на спектре матрицы L, представим в виде

$$g(\lambda) = a\lambda + b.$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} g(1) = f(1) = 0 = a + b \\ g(\frac{1}{16}) = f(\frac{1}{16}) = \frac{a}{16} + b \end{cases}.$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений и находим коэффициенты *a* и *b*: *a* = -16/15; *b* = 15/16.

Зная коэффициенты *a* и *b*, находим матрицу A:

$$A=\ln(L)=(-\frac{16}{15}L+\frac{16}{15}I)\ln(16)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\ln(16)\cdot$$

Применим к уравнению (6) преобразование Лапласа $(\overline{p}(t)\leftrightarrow P(s))$

$$sP(s)-\overline{p}(0)=P(s)A+\frac{\overline{f}}{s}$$

или

$$P(s)(sI-A)=\overline{p}(0)+\frac{\overline{f}}{s}, \qquad (7)$$

где $P(s)=\int\limits_0^{\infty}\overline{p}(t)e^{-st}dt$; I – единичная матрица.

Из (7) имеем

$$P(s)=[\overline{p}(0)+\frac{\overline{f}}{s}](sI-A)^{-1}\cdot$$

Матрица $(sI-A)^{-1}$ полностью описывает поведение марковского процесса с непрерывным временем.

Разлагая все элементы матрицы $(sI-A)^{-1}$на простые дроби, получаем

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+\ln 16)}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Тогда, с учетом (8), $P(s)$ равно

$$P(s)=\overline{p}(0)\left(\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+\frac{1}{(s+\ln 16)}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\overline{f}\left(\frac{1}{s^2}\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{\ln 16}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+\ln 16)}\right)\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\right). \qquad (9)$$

Обратное преобразование Лапласа переводит (9) в выражение

$$\overline{p}(t)=\overline{p}(0)\left(\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}e^{-t\ln 16}\right)+$$

$$+\overline{f}\left(\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}t+\left(\frac{1-e^{-t\ln 16}}{\ln 16}\right)\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\right). \qquad (10)$$

При $t=n$ решение (10) дифференциального уравнения (6) не совпадает с решением для дискретной модели (1), как это было в случаях моделей без управления. Этот факт можно объяснить тем, что решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения, то есть $\overline{f}_N$ в непрерывной модели отличается от $\overline{f}=(f_1,f_2)$ дискретной модели.

Решение (1) дискретной модели при $n=t$ имеет следующий вид

$$\overline{p}(t)=\overline{p}(0)(\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+e^{-t\ln 16}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix})+$$

$$+\overline{f}(t\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}+\frac{16}{15}(1-e^{-t\ln 16})\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}). \qquad (11)$$

Дифференциальное уравнение для непрерывной модели будем искать в виде

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t)=\overline{p}(t)A+\overline{f}X, \qquad (12)$$

где матрица X подлежит определению.

Подставив (11) в (12) и приведя подобные выражения, определим матрицу X

$$X=-\frac{16}{15}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\ln 16.$$

Тогда дифференциальное уравнение (12) примет вид

$$\frac{d}{dt}\overline{p}(t)=\overline{p}(t)A-\frac{16}{15}\overline{f}A=\overline{p}(t)A+\overline{f_N},$$

где

$$\overline{f_N}=-\overline{f}\frac{16}{15}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\ln 16.$$

Выводы и перспективы развития направления. Таким образом, в работе представлена методика построения бездефицитной модели обмена для непрерывных процессов с внешним управлением, результаты которой при $t=n$ совпадают с результатами дискретной модели. Из дискретной модели с выбранными переходной матрицей L и управляющим вектором $\overline{f}$ определяется вектор $\overline{p}(n)$, в котором заменяем n на t. Зная L, находим матрицу интенсивностей переходов A. Затем $\overline{p}(n=t)$ подставляем в дифференциальное уравнение (12) и определяем матрицу X, а значит вектор $\overline{f_N}$. Теперь уравнение (12) представляет собой дифференциальное уравнение для определения вектора $\overline{p}(t)$, который описывает состояние системы в любой момент времени. В получении модели ключевым моментом является определение управляющего внешнего вектора $\overline{f_N}=\overline{f}X$ (административное влияние), то есть матрицы X.

ISSN 2071-2227, Науковий вісник НГУ, 2015, № 5

Модель может быть использована для изучения и планирования процессов обмена в различных экономических системах. Дальнейшим этапом развития направления может быть построение обобщённой модели обмена для непрерывных процессов с внешним управлением.

Список литературы / References

1. Жлуктенко В.І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології / Жлуктенко В.І, Наконечний С.І., Савіна С.С. – К., 2002. – 226с.

Zhuktenko, V.I. and Nakonechnyi, S.I. and Savina, S.S. (2002), *Stokhastychni protsessy ta modeli v ekonomitsi, sotsiolohii, ekolohii* [Stochastic Processes and Models in Economics, Sociology, Ecology], Kiev, Ukraine.

2. Соколов Г.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике / Соколов Г.А., Чистяков Н.А. – М., 2005. − 248с.

Sokolov, G.A. and Chistyakov, N.A. (2005), *Teoriya veroyatnostey. Upravlyaemye tsepi Markova v ekonomike* [Probability. Controlled Markov Chains in the Economy], Moscow, Russia.

3. Кузниченко В.М. Стохастический подход к анализу линейной модели обмена: Применение цепей Маркова в решении задач управления экономическими системами / Кузниченко В.М., Лапшин В.И., Стеценко Т.В. − Saarbrücken, 2014. – P.66.

Kuznichenko, V.M. and Lapshin, V.I. and Stetsenko, T.V. (2014), *Stokhasticheskiy podkhod k analizu lineynoy modeli obmena: Primenenie tsepey Markova v reshenii zadach upravleniya ekonomicheskimi sistemami* [The Stochastic Approach to the Analysis of a Linear Exchange Model: Application of Markov Chains in the Task of Economic Systems], Monograph, Palmarium Academic Publishing, Saarbrücken, Germany.

4. Гандмахер Ф.Р. Теория матриц: 5-е изд. / Гандмахер Ф.Р. − М.: Физматлит, 2004. – 560с.

Gandmakher, F.R. (2004), *Teoriya matrits* [Theory of Matrices], 5nd, Moscow, Fizmatlit, Russia.

Мета. Побудова бездефіцитної моделі обміну для безперервних процесів із зовнішнім управлінням.

Методика. На основі теорії ланцюгів Маркова, методів перетворення Лапласа і Z-перетворення визначаються матриці інтенсивностей і перехідних матриць, що відповідають їм. Знаходження функцій від матриць через многочлени здійснюється на підставі теореми Гамільтона-Келі.

Результати. Розроблена методика побудови бездефіцитної моделі обміну на основі теорії ланцюгів Маркова для безперервних процесів із зовнішнім управлінням, за якої результати безперервної та дискретної моделей співпадають. Бездефіцитна модель припускає, що у процесі обміну та при виході на стаціонарний режим його учасники мають нульове сальдо. Сила, що управляє у вигляді дії адміністрації за рахунок перерозподілу, може коригувати результати обміну між учасниками процесу. Модель дає можливість визначати силу (вплив), що управляє, для процесів реалізації конкретної програми обміну.

Наукова новизна. Раніше бездефіцитна модель обміну на основі теорії ланцюгів Маркова із зовнішнім управлінням була розроблена та використовувалася тільки для дискретних процесів.

Практична значимість. Модель може бути використана в різних економічних системах для вивчення та планування процесів обміну з урахуванням зовнішнього управління безперервно в часі. Прикладами таких систем можуть бути лінійна модель міжнародної торгівлі, грошові й товарні потоки між виконавцями регіональних бюджетних проектів. Подальший розвиток досліджень припускає побудову дефіцитної моделі, в якій розділяють процеси отримання та передачі елементів обміну, що може привести для деяких учасників як до негативного, так і позитивного сальдо.

Ключові слова: *модель обміну, безперервні процеси, зовнішнє управління, ланцюги Маркова*

Purpose. Construction of a deficit-free model of exchange for continuous processes with an external management.

Methodology. Based on the Markov Chain theory, methods of the Laplace transform and Z-transformation the intensity matrix and the corresponding transition matrices were determined. The transformation of matrices function into polynomials was done using the Cayley-Hamilton theorem.

Findings. The methodology of construction of the deficit-free model of exchange based on the Markov Chain theory for continuous processes with an external management was developed. The results of the continuous and discrete models coincide. A deficit- free model assumes that in the process of exchange and when entering the stationary mode its participants have zero balance. Control force as an action of administration due to the redistribution can correct the results of exchange between the participants of the process. The model allows determining the control force (influence) for the processes of realization of a certain program of exchange.

Originality. Earlier, the deficit-free model of exchange that is based on the Markov Chain theory with an external management was constructed and used only for discrete processes.

Practical value. The model may be used in the different economic systems for the study and planning of exchange processes taking into account an external management continuous in time. Such systems can exemplify the linear model of international trade, money and commodity streams between the performers of regional budgetary projects. Further development of the research supposes the construction of a deficit model. In the deficit model, the processes of receipt and transmission of elements of exchange are divided. This can result in a negative or positive balance of some participants.

Keywords: *model of exchange, continuous processes, external management, Markov Chain*

Рекомендовано до публікації докт. фіз.-мат. наук В.М. Кукліним. Дата надходження рукопису 14.10.14.