УДК 31:004

А.С. Корхин

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНИХ ХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН РЯДОВ ДИНАМИКИ

A.S. Korkhin

ON DETERMINATION OF TIME SERIES AVERAGES

Описывается общий метод определения средних хронологических величин и вытекающие из него приближенные формулы их расчета. Рассматриваются вычисления средних для обоих видов рядов динамики: моментных и интервальных. Исходя из подхода, основанного на том, что экономические показатели являются непрерывными функциями времени, предлагаются точные формулы вычисления средних. Применяемые на практике формулы для моментного ряда являются результатом численного (приближенного) интегрирования методом трапеций. Приводится более точная формула для средней моментного ряда, полученная на основе численного интегрирования методом парабол.

Ключевые слова: *интеграл, период отсчета, показатель, ряд динамики, средняя, уровень ряда, функция времени*

Средняя хронологическая величина ряда динамики — важный экономический показатель, который широко используется в практических расчетах. Этот вид средней получается усреднением уровней ряда динамики по времени. Несмотря на его кажущуюся изученность идейная сторона формул вычисления хронологических средних требует, на наш взгляд, уточнений.

Выведем формулы для вычисления средней хронологической, основываясь на том, что исследуемый экономический показатель представляет собой непрерывную функцию времени $x(t)$, где время t принимает любые действительные положительные значения, а не только целые. Такой подход, очевидно, отвечает действительности: количество проданного товара изменяется непрерывно, себестоимость продукции также можно считать непрерывной функцией времени и т. п.

Пусть отсчет показателя проводится через одинаковые интервалы времени продолжительностью h. Всего имеется T моментов отсчета. Таким образом, $0 \le t \le Th$. Для определения средней хронологической необходимо знать длину периода усреднения. В нашем случае она будет равна Th. Тогда средняя хронологическая величина определяется интегралом

$$\bar{x} = \frac{1}{Th}\int_0^{Th} x(t)\,dt\,. \tag{1}$$

Вычислить интеграл (1) невозможно, так как функция $x(t)$ – неизвестна. Известны только ее значения в дискретные моменты отсчета: x_t, $t = 1, 2, 3, \dots$.

Поэтому появляется задача определения средней хронологической величины $\bar{x}$ по этим значениям. Методы расчета величины $\bar{x}$ для интервального и моментного рядов динамики будут различными в силу специфики вычисления уровней этих рядов. Как известно, интервальный ряд динамики показывает значение величины экономического показателя $x(t)$ за определенные интервалы времени, а моментный ряд — в определенные моменты времени.

Рассмотрим, как определяется средний уровень интервального ряда динамики.

В связи с тем, что имеется T моментов отсчета, то известно T уровней ряда (число T часто называют длиной ряда). В соответствии с определением интервального ряда имеем величины его уровней, известные в конце каждого периода отсчета времени

$$x_1 = \int_0^{h} x(t)\,dt,\ x_2 = \int_h^{2h} x(t)\,dt, \dots,\ x_T = \int_{Th-h}^{Th} x(t)\,dt\,. \tag{2}$$

Рис. 1 иллюстрирует сказанное об интервальном ряде динамики. На нем величина x_1 равна площади первой заштрихованной полоски, x_2 – второй и т. д.

Из (1) имеем

$$\bar{x} = \frac{1}{Th}\left(\int_0^{h} x(t)\,dt + \int_h^{2h} x(t)\,dt + \right.$$
$$\left. + \int_{2h}^{3h} x(t)\,dt + \dots + \int_{Th-h}^{Th} x(t)\,dt\right).$$

Отсюда и из формулы (2) следует, что

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{T} x_i}{Th}. \quad (3)$$

Пусть длительность интервала времени между уровнями временного ряда равна единице времени (сутки, месяц, год и т.п.), что обозначим как

$$h = 1. \quad (4)$$

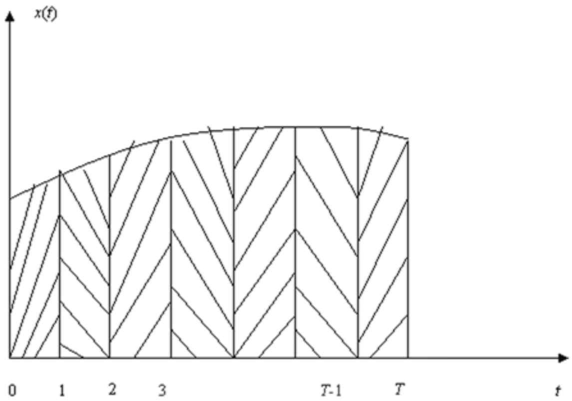

Рис. 1. Интервальный ряд динамики

Для этого случая из (3) получим

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{T} x_i}{T}. \quad (5)$$

Обычно в учебниках по общей теории статистики для средней хронологической величины интервального ряда динамики с равными интервалами отсчета по умолчанию приводится формула (5). Однако, как только что мы установили, общее выражение для этого случая имеет вид (3).

Если же интервальный ряд имеет неравные интервалы отсчета $h_i, i = 1, 2, \ldots, T$, то формулы (1) и (2) примут соответствующий вид

$$\overline{x} = \frac{1}{H} \int_0^H x(t)\,dt;$$

$$x_1 = \int_0^{h_1} x(t)\,dt, \quad x_2 = \int_{h_1}^{h_2} x(t)\,dt, \ldots, x_T = \int_{h_{T-1}}^{h_T} x(t)\,dt,$$

где $H = \sum_{i=1}^{T} h_i$.

Из последних двух выражений, рассуждая аналогично выводу формулы (3), получим среднюю хронологическую величину для интервального ряда с неравными интервалами отсчета, а именно

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{T} x_i}{H}. \quad (6)$$

Определим средний уровень для моментного ряда динамики. Для этого вида ряда с одинаковыми интервалами отсчета h известные его уровни определяются так

$$x_t = x(t), \quad t = 0, h, 2h, 3h, \ldots, Th, \quad (7)$$

где $t = 0$ соответствует начальный уровень ряда, а $t = T$ – последний уровень ряда. При этом имеется $T + 1$ моментов отсчета (рис. 2).

В связи с тем, что функция $x(t)$ известна в дискретные моменты времени (7), то для вычисления интеграла (1) воспользуемся формулами численного интегрирования. Наиболее применяемыми являются такие формулы: прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона). Точность вычислений по этим формулам возрастает в том порядке, в котором они перечислены. В связи с тем, что точность вычислений по формуле трапеций выше, чем по формуле прямоугольников, то для определения интеграла (1) воспользуемся формулой трапеций. Запишем

$$\overline{x} \approx \frac{1}{Th}\left[\frac{h}{2}\left(x_0 + 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{T-1} + x_T\right)\right]. \quad (8)$$

Откуда получаем

$$\overline{x} \approx \frac{\frac{x_0 + x_T}{2} + \sum_{t=1}^{T-1} x_t}{T}. \quad (9)$$

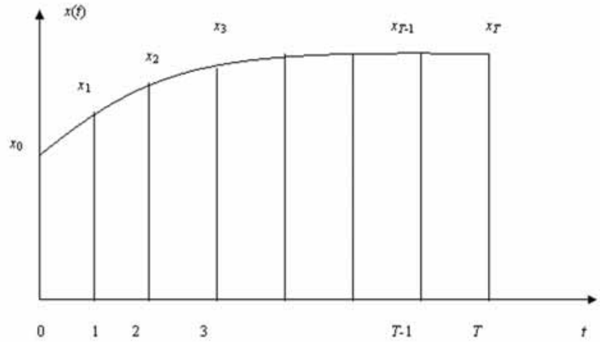

Рис. 2. Моментный ряд динамики

Немного изменим обозначения уровней ряда в (7): будем вести отсчет времени с $t = 1$. Последний уровень ряда, как и ранее, будет соответствовать $t = T$. Для такой нумерации из выражения (8) получим

$$\overline{x} \approx \frac{1}{(T-1)h}\left[\frac{h}{2}\left(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{T-1} + x_T\right)\right],$$

что влечет

$$\overline{x} \approx \frac{\frac{x_1 + x_T}{2} + \sum_{t=2}^{T-1} x_t}{T-1}. \quad (10)$$

Полученное выражение обычно приводится в учебниках по общей теории статистики как точная формула

[1]. При этом обоснование (10), основанное на эвристических соображениях, нельзя признать удовлетворительным. Так, наличие средней арифметической первого и последнего уровней ряда в числителе (10) объясняется желанием избежать двойного счета.

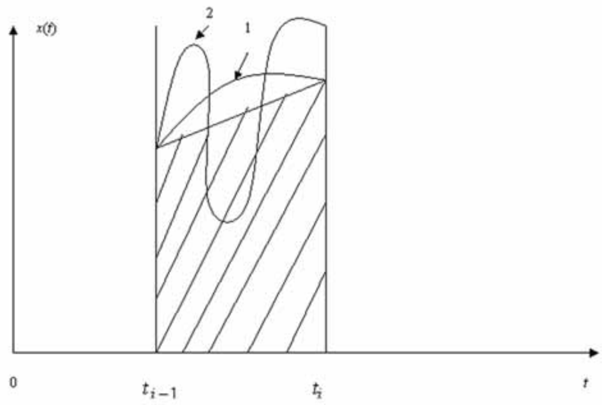

Рис. 3. Иллюстрация зависимости точности вычисления средней хронологической величины моментного ряда от интервала отсчета

На самом деле выражение (10) – неточное, так как основано на приближенной формуле интегрирования. Более того, оно не единственное, так как существует несколько методов численного интегрирования.

Точность вычислений по формуле (10) иллюстрирует рис. 3. На нем изображен один интервал времени продолжительностью h. Кривой 1 соответствует монотонное медленное изменение признака, кривой 2 – быстрое значительное изменение признака. Заштрихованная площадь является площадью трапеции. Как видим, площадь трапеции близка к площади под кривой 1 и сильно отличается от площади под кривой 2. Очевидно, чем быстрее будут происходить изменения показателя $x(t)$, тем больше будет погрешность вычисления среднего уровня признака по формуле (10).

Обобщим формулу (10) на случай, когда интервалы отсчета $h_1, h_2, \ldots, h_{T-1}$ не равны между собой. Средняя хронологическая величина моментного ряда, вычисляемая по формуле трапеций, в этом случае запишется так

$$\bar{x} \approx \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{T-1} h_i}\left[\frac{(x_1+x_2)h_1}{2}+\frac{(x_2+x_3)h_2}{2}+\cdots+\frac{(x_{T-1}+x_T)h_{T-1}}{2}\right]=\frac{1}{2\sum\limits_{i=1}^{T-1} h_i}\left[(x_1h_1+x_Th_{T-1})+\sum_{i=2}^{T-1} x_i(h_{i-1}+h_i)\right]. \qquad (11)$$

В том случае, когда показатель достаточно быстро меняется, можно среднюю моментного ряда вычислять для четного числа наблюдений и равных интервалов их отсчета по формуле

$$\bar{x} \approx \frac{1}{Th}\left[\frac{h}{3}\left(x_0+4x_1+2x_2+4x_3+\cdots+2x_{T-1}+ +4x_{T-2}+x_T\right]\right), \qquad (12)$$

основанной на формуле парабол Симпсона, которая получается в результате аппроксимации кривой $x(t)$ параболой в каждой точке отсчета времени. Обозначения в формуле (12) совпадают с обозначениями в формуле (8).

Окончательно получаем из (12)

$$\bar{x} \approx \frac{1}{3T}\left(x_0+4x_1+2x_2+4x_3\cdots+2x_{T-1}+4x_{T-2}+x_T\right).$$

Следует отметить, что задача повышения точности вычисления среднего уровня моментного ряда является частью проблемы определения интервала отсчета значений непрерывного экономического показателя. Постановка ее приведена в [2].

Дальнейшим шагом в решении рассмотренной задачи является определение погрешности вычисления средних по приведенным формулам.

Список литературы

1. Теория статистики / Под ред. Р.А. Шмойловой. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 576 с.
2. Корхин А.С. 0б определении периода отчетности технико-экономических показателей // Исследование операций и АСУ. — 1976. — № 9. — С. 43 — 48.

Описується загальний метод визначення середніх хронологічних величин і наближені формули їх розрахунку, що витікають із цього методу. Розглядаються обчислення середніх для обох видів рядів динаміки: моментних та інтервальних. Виходячи з підходу, заснованого на тому, що економічні показники є безперервними функціями часу, пропонуються точні формули обчислення середніх. Застосовані на практиці формули для моментного ряду є результатом чисельного (наближеного) інтегрування методом трапецій. Наводиться точніша формула для середньої моментного ряду, що одержана на основі чисельного інтегрування методом парабол.

Ключові слова: *інтеграл, період відліку, показник, ряд динаміки, середня, рівень ряду, функція часу*

The general method of determination of time series averages and approximate formulas of its calculation are described. Calculation of averages for time series both: moment series and interval series is considered. On the assumption of the approach, based on the premise that economic indicators are the continuous functions of time, the exact formulas of average calculation are given. The formulas applied in practice for moment series are the result of numeral (approximate) integration by the method of trapezoids. More exact formula for average moment series got on the basis of numeral integration by the method of parabolas is adduced.

Keywords: *integral, period of time reckoning, index, series of dynamics, average, level of time series, function of time*

Рекомендовано до публікації д.т.н. Л.М. Солодовником. Дата надходження рукопису 10.11.10