

А.П. Иванова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ МОМЕНТОВ ВАЛОВ В ТРЕХМАССОВОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Отримано диференційні рівняння моментів сил пружності трьохмасової системи, на яку діють конкретні зовнішні навантаження. Визначено максимальні значення моментів для заданого проміжку часу, розглянуто резонансний випадок, визначено кут скручування вала.

Получены дифференциальные уравнения моментов сил упругости трехмассовой системы, на которую действуют конкретные внешние нагрузки. Определены максимальные значения моментов для заданного промежутка времени, рассмотрен резонансный случай, определен угол скручивания вала.

Differential equalizations of moments of forces of resiliency are got for the three-mass turning system, being under the action of the concrete external loadings. The maximal values of moments are got for the set interval of time, a resonance case is considered, the corner of wring of billow is certain.

Актуальность проблемы. Важнейшим этапом, который предшествует изучению динамических процессов, происходящих в реальной системе машины, является схематизация этой системы. Исследование динамических процессов в машинном агрегате позволяет выбрать конструктивные и рабочие характеристики отдельных узлов эксплуатационной надежности машины, а также установить определенные закономерности, характеризующие поведение системы в диапазоне рабочих режимов. Метод динамического расчета машин с учетом упругости звеньев достаточно общий и использован для определения упругих моментов, передаваемых валами трехмассовой крутильной схемы. Предполагалось, что в расчетной схеме отсутствуют зазоры и сопротивления, пропорциональные скорости деформации. Эти сопротивления оказывают влияние на поведение машины, однако, если ставится задача получить значение наибольших нагрузок, возникающих в механизме в указанные фазы работы машины, то пренебрежение внутренним трением материала вполне допустимо.

Рассматриваемая система приводится в движение электродвигателем. Момент ротора двигателя зависит от переходных процессов, протекающих в его электрических цепях. Характер воздействия этих процессов (через момент ротора) на линию передачи машины будет зависеть от типа двигателя и его характеристики.

Постановка задачи. Путем решения дифференциальных уравнений движения приведенной трехмассовой электромеханической системы привода определить упругие моменты и углы закручивания участков вала.

Методика исследования. В статье рассматривается динамика упругой системы привода с тремя массами и постоянными жесткостями участков вала (рис. 1). Зазоры в сопряжениях отсутствуют, к первой массе с моментами инерции θ_1 приложен момент двигателя

$$M_1 = M_T \cdot \frac{t}{T}, \quad (1)$$

где M_T – максимальное постоянное значение момента, то есть, начиная с момента времени $t \geq T$; $M_1 = M_T$; T – время нарастания тока (постоянное).

К массе θ_2 приложен момент сопротивления

$$M_2 = M_T \sin \frac{\pi \cdot t}{2T}. \quad (2)$$

Момент сопротивления постоянный и приложенный к массе с моментом инерции θ_3

$$M_3 = M_0. \quad (3)$$

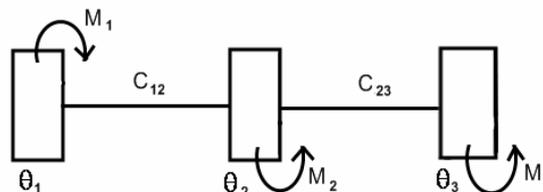


Рис. 1. Трехмассовая электромеханическая система

В работе также определяются упругие моменты на участках вала C_{12} и C_{23} и их максимальные значения, а также углы закручивания участков вала для случая $t < T$, $t \geq T$.

В случае $t < T$, согласно (1) – (3) из работы [1] получаем дифференциальные уравнения моментов сил упругости для трехмассовой системы:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{M}_{12} + \beta_{12}^2 M_{12} - \frac{C_{12}}{\theta_2} M_{23} &= \frac{C_{12} M_T}{\theta_1 \theta_2} \left(\frac{\theta_2}{T} t + \theta_1 \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} \right); \\ \ddot{M}_{23} + \beta_{23}^2 M_{23} - \frac{C_{23}}{\theta_2} M_{12} &= C_{23} \left(\frac{M_1}{\theta_2} \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} - \frac{M_0}{\theta_3} \right) \end{aligned} \right\} (4)$$

где $\beta_{i, i+1}^2 = \frac{C_{i, i+1} (\theta_i + \theta_{i+1})}{\theta_i + \theta_{i+1}}$; ($i = 1, 2$) – квадраты

цикловых частот; $C_{i, i+1}$ – жесткость участков вала.

Для решения системы уравнений (4) исключаем функцию M_{23} , тогда получим:

$$M_{12}^{(IV)} + a_2 \ddot{M}_{12} + a_0 M_{12} = f(t), \quad (5)$$

где

$$a_2 = \beta_{12}^2 + \beta_{23}^2, \quad a_0 = \beta_{12}^2 \beta_{23}^2 - \frac{C_{12} C_{23}}{\theta_2 \theta_3},$$

$$f(t) = \beta_{23}^2 \frac{C_{12} M_T}{\theta_3 T} t - \frac{C_{12} M_T}{\theta_2} \left[\frac{\pi^2}{4T^2} - (\beta_{23}^2 + \frac{C_{23}}{\theta_2}) \right] \times$$

$$\times \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} - \frac{C_{12} C_{23}}{\theta_2 \theta_3} M_0.$$

Характеристическое (частотное) уравнение будет иметь вид:

$$\beta^4 + a_2 \beta^2 + a_0 = 0. \quad (6)$$

Теоретически показано [1], что если цикловые частоты собственных колебаний крутильной системы соответственно β_1 и β_2 , то корни характеристического уравнения связаны с β_1 и β_2 . Предположим, $\beta_1 \neq \beta_2$ и нет резонанса, то есть $\frac{\pi}{2T} \neq \beta_i$, $i=1,2$, тогда общее решение уравнения (5) будет иметь вид:

$$M_{12}' = A_1 \cos \beta_1 t + B_1 \sin \beta_1 t + A_2 \cos \beta_2 t + B_2 \sin \beta_2 t +$$

$$+ \frac{C_{12} C_{23} M_0 (1 - \cos \beta_1 t)}{\theta_2 \theta_3 \beta_1^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} + \beta_{23}^2 \frac{C_{12} M_T t}{T \theta_1 \beta_1^2 \beta_2^2} -$$

$$- \frac{C_{12} C_{23} M_0 (1 - \cos \beta_2 t)}{\theta_2 \theta_3 \beta_2^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} +$$

$$+ \frac{C_{12} M_T \cdot \sin \beta_1 t}{\theta_1 \theta_2 T \beta_1^3 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2)} \times$$

$$\left[\beta_{23}^2 \theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) + 2\pi T^2 \beta_1^2 \theta_1 D \right] - \quad (7)$$

$$- \frac{C_{12} M_T \cdot \sin \beta_2 t}{\theta_1 \theta_2 T \beta_2^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \times$$

$$- \left[2\pi T^2 \beta_2^2 \theta_1 D + \beta_{23}^2 \theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] -$$

$$- \frac{16T^4 C_{12} D \cdot M_T \sin \frac{\pi \cdot t}{2T}}{\theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)},$$

$$\text{где} \quad D = \frac{\pi^2}{4T^2} - (\beta_{23}^2 + \frac{C_{23}}{\theta_2}), \quad (8)$$

Полагаем, что при $t = 0$:

$$M_{12} = \dot{M}_{12} = \ddot{M}_{12} = \ddot{\ddot{M}}_{12} = 0,$$

найдем, что $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$.

Определим момент сил упругости M_{23} , это можно сделать двумя способами. Во-первых, воспользовавшись первым уравнением системы (4):

$$M_{23}(t) = \frac{\theta_2}{C_{12}} \ddot{M}_{12} + \frac{\theta_2}{C_{12}} \beta_{12}^2 M_{12} - M_T \sin \frac{\pi}{2T} - \frac{\theta_2 M_T}{\theta_1 T} t,$$

где M_{12} представлено в виде (7), тогда

$$M_{23}(t) = - \frac{C_{23} \beta_{12}^2 M_0}{\theta_3 \beta_1^2 \beta_2^2} + \frac{\beta_2 M_T (\beta_{12}^2 \beta_{23}^3 - \beta_1^2 \beta_2^2)}{\theta_1 T \beta_1^2 \beta_2^2} t +$$

$$+ \frac{C_{23} M_0 (\beta_1^2 - \beta_{12}^2) \cos \beta_1 t}{\theta_3 \beta_1^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} + \frac{C_{23} M_0 (\beta_2^2 - \beta_{12}^2) \cos \beta_2 t}{\theta_3 \beta_2^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)} -$$

$$- \frac{M_T \cdot \sin \beta_1 t}{\theta_1 T \beta_1^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2)} \times$$

$$\times \left[2\pi T^2 \beta_1^2 \theta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) D - \beta_{23}^2 \theta_2 (\beta_1^2 - \beta_{12}^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) \right] -$$

$$- \frac{M_T \cdot \sin \beta_2 t}{\theta_1 T \beta_2^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \times \quad (9)$$

$$\times \left[2\pi T^2 \beta_2^2 \theta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) D - \beta_{23}^2 \theta_2 (\beta_2^2 - \beta_{12}^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] -$$

$$- \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} \cdot \frac{M_T}{(\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \times$$

$$\times \left[4T^2 D (4T^2 \beta_{12}^2 - \pi^2) + (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right],$$

где D получено по формуле (8).

Далее, для того чтобы найти M_{23} , воспользуемся вторым уравнением системы (4)

$$\ddot{M}_{23} + \beta_{23}^2 M_{23} = \frac{C_{23}}{\theta_2} \cdot M_{12} + \frac{C_{23}}{\theta_2 \theta_3} \cdot (M_T \theta_3 \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} - \theta_2 M_0), \quad (10)$$

где M_{12} уже известно из выражения (10). Тогда общее решение уравнения (9) будет:

$$M_{23} = A \sin(\beta_2 \cdot t + \alpha) + \frac{1}{\beta_2} \int_0^t f_1(u) \sin \beta_2(t-u) du, \quad (11)$$

где f_1 – правая часть (10); A, α – постоянные, которые определяются из начальных условий.

Решение уравнения (11) должно быть такое же, как и решение (13). В случае резонанса решения должны отличаться от (7), (9).

Для определения экстремальных значений упругих моментов, которые записаны в виде (7) и (9), можно воспользоваться обычным методом анализа [2, 3], но решить трансцендентные уравнения и проверить знак производных второго порядка сложно. Поэтому используем максимальные значения этих упругих моментов с геометрической точки зрения [2].

Допустим, сомножители, стоящие перед $\cos \beta_1 t$ и $\cos \beta_2 t$ меньше нуля, а сомножители, стоящие

перед $\sin \beta_1 t$, $\sin \beta_2 t$ и $\sin \frac{\pi \cdot t}{2T}$ больше нуля.

Тогда приравнявая

$$\cos \beta_1 t = \cos \beta_2 t = -1, \sin \beta_1 t = \sin \beta_2 t = \frac{\pi \cdot t}{2T} = 1, \quad (12)$$

получим для M_{12} и M_{23} соответственно

$$M_{12}^{\max} = -\frac{2 \cdot C_{12} \cdot C_{23} \cdot M_0}{\theta_2 \theta_3 \beta_1^2 \beta_2^2} + \beta_{23}^2 \frac{C_{12} \cdot M_T}{\theta_1 \beta_1^2 \beta_2^2} + \frac{2T^2 C_{12} M_T D}{\theta_1 \theta_2 T \beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - T^2 \beta_2^2)} \times$$

$$\left[-8T^3 \beta_1 \beta_2 \theta_1 (\beta_1^2 - \beta_2^2) - \pi \theta_1 (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) \beta_1 + \pi \theta_1 \beta_2 \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] \beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_{23}^2 C_{12} \theta_2 M_T (\beta_2^2 - \beta_1^2) \times$$

$$\left. \times (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right],$$

$$M_{23}^{\max} = \frac{\theta_3 \theta_2 M_T (\beta_{12}^2 \beta_{23}^2 - \beta_1^2 \beta_2^2) - \theta_1 C_{23} \beta_{12}^2 M_0}{\theta_1 \theta_2 \beta_1^2 \beta_2^2} - \frac{C_{23} M_0 \beta_{12}^2}{\theta_3 \beta_1^2 \beta_2^2} + \frac{\beta_{23}^2 \theta_2 M_T \left[\beta_1^3 (\beta_2^2 - \beta_{12}^2) - \beta_2^3 (\beta_1^2 - \beta_{12}^2) \right]}{\theta_1 T \beta_1^3 \beta_2^3 (\beta_1^2 - \beta_2^2)}$$

$$- \left[2T^2 \pi \theta_1 D (\beta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) - \right. \quad (14)$$

$$\left. - \beta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] \times$$

$$\times \frac{M_T}{\theta_1 T \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} -$$

$$- \frac{M_T \left[4T^2 D (4T^2 \beta_{12}^2 - \pi^2) - (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right]}{(\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)},$$

При выборе:

$$\cos \beta_1 t = \sin \beta_1 t = \cos \beta_2 t = \sin \beta_2 t = \sin \frac{\pi t}{2T} = 1, \quad (15)$$

в формулах (13) первое слагаемое – нуль, остальные неизменные, а в формулах (14) второе слагаемое – со знаком плюс, остальные неизменные. Из (7) и (9) очевидно, что при $t = T$ максимальные для M_{12} и M_{23} будут такие же, как в (13) и (14). Естественно, когда вычисляем M_{12}^{\max} и M_{23}^{\max} , знак тригонометрических функций берем так, чтобы произведение соответствующих сомножителей было бы положительно, если $\frac{\pi}{2T} = \beta$, возникает резонанс, где β равно либо β_1 , либо β_2 , тогда уравнение (5) имеет вид:

$$M_{12}^{(IV)} + a_2 \ddot{M}_{12} + a_0 M_{12} = b_1 + b_2 t + b_3 \sin \beta \cdot t, \quad (16)$$

где

$$b_1 = -\frac{C_{12} C_{23} M_0}{\theta_2 \theta_3}, b_2 = \beta_{23}^2 \frac{C_{12} M_T}{\theta_1 T},$$

$$b_3 = M_T \left(\frac{C_{12} C_{23}}{\theta_2 \theta_3} + \frac{C_{12} \beta_{23}^2}{\theta_2} - \beta_2 \frac{C_{12}}{\theta_2} \right).$$

Получаем частное решение уравнения (16) в виде [2]:

$$M_{12}(t) = C_1 + C_2 t + t(C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t). \quad (17)$$

Подставляя (17), \ddot{M}_{12} и $M_{12}^{(IV)}$ в (16) и учитывая (6), получим:

$$\beta^4 - a_2 \beta^2 + a_0 = a, C_1 = \frac{b_1}{a_0}; C_2 = \frac{b_2}{a_0};$$

$$C_3 = \frac{b_3}{2\beta(2\beta^2 - a^2)}; C_4 = 0, \beta \neq \frac{a_2}{2}. \quad (18)$$

Если $\beta^4 = -a_0$, то $M_{12}(t) = C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t \cos \beta \cdot t$, где C_1, C_2, C_3 находим из (18).

Можно доказать, что $\beta_1 \neq \beta_2$. Согласно [1] корни уравнения (6) должны быть $\beta_{\alpha 12} = \pm i \cdot \beta_1$,

$$\beta_{\alpha 34} = \pm i \cdot \beta_2$$

$$\text{Решая (6), получим } \beta_1^2 = \frac{a_2 - \beta}{2};$$

$$\beta_2^2 = \frac{a_2 + \beta}{2}, \text{ где } \beta^2 = (\beta_{12}^2 - \beta_{23}^2)^2 + \frac{C_{12} C_{23}}{\theta_2 \theta_3} > 0.$$

Рассмотрим случай $t \geq T$, когда левая часть уравнения (6) неизменна, а правая имеет вид:

$$f(t) = \frac{C_{12} \beta_{23}^2}{\theta_1} M_T -$$

$$- \frac{C_{12}}{\theta_2} D M_T \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} -$$

$$- \frac{C_{12} C_{23}}{\theta_2 \theta_3} M_0.$$

Заметим, что D получено из выражения (8)

Общее решение уравнения (5) в данном случае имеет вид [2]:

$$M_{12}(t) = A_3 \cos \beta_1 t + B_3 \sin \beta_1 t + A_4 \cos \beta_2 t + B_4 \sin \beta_2 t +$$

$$+ D_1 (1 - \cos \beta_1 t) + D_2 \sin \beta_1 t + D_3 (1 - \cos \beta_2 t) + \quad (19)$$

$$+ D_4 \sin \frac{\pi \cdot t}{2T} + D_5 \sin \beta_2 t,$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{C_{12}(M_T \beta_{23}^2 \theta_2 \theta_3 - M_0 C_{23} \theta_1)}{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \beta_1^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \\ D_2 &= \frac{2T \pi C_{12} D M_T}{\theta_2 \beta_1 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi - 4T^2 \beta_1^2)}, \\ D_3 &= \frac{C_{12}(M_T \beta_{23}^2 \theta_2 \theta_3 - M_0 C_{23} \theta_1)}{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \beta_2^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \\ D_4 &= -\frac{16T^4 C_{12} M_T D}{\theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)}, \\ D_5 &= \frac{2\pi T C_{12} D M_T}{\beta_2 \theta_2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

A_3, B_3, A_4, B_4 – произвольные постоянные, определяются из начальных условий, которые при $t = T$ равны:

$$M_{12} = M_{12}^{(0)}, \dot{M}_{12} = \dot{M}_{12}^{(0)}, \ddot{M}_{12} = \ddot{M}_{12}^{(0)}, \quad (21)$$

Очевидно, чтобы найти эти постоянные, надо решить систему 4-х алгебраических уравнений с 4-мя неизвестными. Упругий момент во втором участке будет равен:

$$\begin{aligned} M_{23}(t) &= \frac{\theta_2}{C_{12}} (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) (A_3 \cos \beta_1 t + B_3 \sin \beta_1 t) + \\ &+ \frac{\theta_2}{C_{12}} (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) (A_4 \cos \beta_2 t + B_4 \sin \beta_2 t) - \frac{\theta_2}{\theta_1} M_T + \\ &+ \frac{\beta_{12}^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{C_{12} \beta_2^2} E_1 + \frac{\theta_2 (\beta_1^2 - \beta_{12}^2)}{C_{12}} E_1 \cos \beta_1 t + \\ &+ \frac{\theta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{C_{12}} E_2 \sin \beta_2 t + \left[\theta_2 (\beta_{12}^2 - \frac{\pi^2}{4T^2}) E_3 - M_T \right] \times \\ &\times \sin \frac{\pi T}{2T} + \frac{\theta_2 (\beta_2^2 - \beta_{12}^2)}{C_{12}} E_4 \cos \beta_2 t + \\ &+ \frac{\theta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{C_{12}} E_5 \sin \beta_2 t, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$E_1 = D_1, E_2 = -D_2, E_3 = D_4, E_4 = D_3, E_5 = -D_5, \quad (23)$$

A_3, B_3, A_4, B_4 – найдены ранее по формуле (19) при условии (21).

Из (12) и при $\sin \beta_1 T = \cos \beta_1 T = 1, i = 1, 2$ окончательно получим максимальные значения для M_{12}, M_{23} :

$$\begin{aligned} M_{12}^{\max} &= \frac{2(\beta_1^3 - \beta_2^3) M_{12}^0}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} - \\ &- \left\{ \pi \left[\pi^2 (\beta_2 - \beta_1) + 4T^2 (\beta_1^3 - \beta_2^3) \right] + 8T^3 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \right\} \times \\ &\times \frac{2 \cdot T \cdot D \cdot C_{12} M_T}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{23}^{\max} &= \frac{2\theta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{C_{12} \beta_1 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \times \\ &\times \left[-\beta_2^2 \dot{M}_{12}^0 + \frac{C_{12} (M_T \beta_{23}^2 \theta_2 \theta_3 - \theta_1 C_{23} M_0)}{\beta_1 \theta_1 \theta_2 \theta_3} - \right. \\ &- \left. \frac{2\pi \cdot T \cdot D \cdot C_{12} \cdot M_T}{\theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2)} \right] + \frac{2\theta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{C_{12} \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \times \\ &\times \left[\beta_1^2 M_{12}^0 - \frac{C_{12} (M_T \beta_{23}^2 \theta_2 \theta_3 - \theta_1 C_{23} M_0)}{\beta_2 \theta_1 \theta_2 \theta_3} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\pi \cdot T \cdot C_{12} \cdot D \cdot M_T}{\theta_2 (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \right] - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} M_T + \\ &+ \frac{2T \cdot D \cdot M_T}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)} \times \\ &\times \left\{ \pi^2 \left[\beta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) - \right. \right. \\ &- \left. \beta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) \right] - \\ &- \left. 8T^2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \left(\beta_{12}^2 - \frac{\pi^2}{4T^2} \right) \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Учитывая (15) и $\cos \beta_1 T = \sin \beta_1 T = 1$ получим:

$$\begin{aligned} M_{12}^{\max} &= 2M_{12}^0 - \left\{ \pi \left[\pi^2 (\beta_2 - \beta_1) + 4T^2 (\beta_1^3 - \beta_2^3) \right] \right. \\ &- \left. 8T^3 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \right\} \times \\ &\times \frac{2T D C_{12} M_T}{\beta_1 \beta_2 \theta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$M_{23}^{\max} = 2 \frac{\theta_2}{C_{12}} \beta_{12}^2 M_{12}^0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} M_T - \frac{8T^2 DM_T}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\beta_{12}^2 - \beta_2^2}{\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2} - \frac{\beta_{12}^2 - \beta_1^2}{\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2} \right] +$$

$$+ \frac{2TDM_T}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)^2} \times \quad (27)$$

$$\times \left\{ \pi^2 \left[\beta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) - \beta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] - \right.$$

$$\left. - 8T^2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \left(\beta_{12}^2 - \frac{\pi^2}{4T^2} \right) \right\},$$

Из (19) и (22), согласно (20), (21), (23) при $t = T$, получаем:

$$M_{12}(T) = M_{12}^0; M_{23}(T) = \frac{\theta_2 \beta_{12}^2}{C_{12}} M_{12}^0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} M_T = M_{23}^0,$$

откуда видно, что решение уравнения (19) удовлетворяет условию (21).

Согласно [1]:

$$M_{12}(t) = C_{12} \cdot \varphi_{12}, M_{23} = C_{23} \cdot \varphi_{23}, \quad (28)$$

получаем:

$$\varphi_{12}^{\max} = \frac{M_{12}^{\max}}{C_{12}}, \quad \varphi_{23}^{\max} = \frac{M_{23}^{\max}}{C_{23}}, \quad (29)$$

где M_{12}^{\max} и M_{23}^{\max} определяются соответственно из (13), (17), (24), (26), и (14), (25), (27).

По формуле $C_{i,i+1} = \frac{\sigma_i J_{Pi}}{\ell_i}$, ($i=1,2$), найдем полярный момент поперечного сечения вала, т. е.

$$J_{Pi} = \frac{\ell_i \cdot C_{i,i+1}}{\sigma_i}.$$

УДК 621.926.5

© Б.В. Виноградов, 2010

Б.В. Виноградов

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИВОДА БАРАБАННОЙ МЕЛЬНИЦЫ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

Наведена динамічна модель барабанного млина, обґрунтоване розділення її на парціальні системи. Барабан з продуктами завантаження розглянуто як фізичний маятник.

Представлена динамическая модель привода барабанной мельницы, обосновано разбиение её на парциальные системы. Барабан с продуктами загрузки рассмотрен как физический маятник

Presented dynamic model of the drum mill, substantiate partitioning per partial system. Drum with product of the loading is considered as physical pendulum.

Привод барабанной мельницы представляет собой сложную электромеханическую систему. При динамических расчётах, в зависимости от поставленной задачи, полную эквивалентную динамическую схему целесообразно разбивать на парциальные системы, выбор которых требует обоснования.

Если считать известными углы φ_{12} , φ_{23} – определяемые из (29), где ℓ_i – длина вала, σ_i – модуль сдвига, $C_{i,i+1}$ – жесткость определяем из (28) при заданных φ_{12} , φ_{23} [4, 5].

Заключение. Получены дифференциальные уравнения моментов сил упругости для заданных условий работы трехмассовой крутильной системы. Приведены выражения для определения экстремальных упругих моментов, а также учтены резонансные случаи. Определены углы скручивания вала, что имеет практическое значение для расчета предельной жесткости вала.

Список литературы

1. Кожевников С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во Акад. наук Украинской ССР, 1961. – 160 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д. Элементы прикладной математики – М.: Наука, 1967. – 646 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, ч. II. – М.: Высшая школа, 1971. – 476 с.
4. Иванова А.П. Исследование причин поломок деталей привода механизма подъема кранов и определение допустимой скорости двигателя при подхвате груза // Системні технології: Регіональний міжвуз. зб. наук. праць. – Д.: НМетАУ. – 2005. – № 3(38). – С. 46-52.
5. Иванова А.П., Штыцко П.И. Совершенствование приводного механизма рабочей клетки станок ХПТ // Системні технології: Регіональний міжвуз. зб. наук. праць. – Д.: НМетАУ. – 2008. – № 5(58). – С. 50-56.

Рекомендовано до публікації д.т.н. О.М. Шашенком 24.11.09