УДК 004.942:553.044

М.Г. Лустюк, д-р техн. наук, проф.,
В.М. Дякон, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
М.Л. Петрина, А.А. Рачковська

Приватний вищий навчальний заклад „Європейський університет“, м. Рівне, Україна, e-mail: it-eufimb@rambler.ru

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ЗАПАСІВ КОРИСНИХ КОПАЛИН

M.G. Lustiuk, Dr. Sci. (Tech.), Professor,
V.M. Diakon, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
M.L. Petrina, A.A. Rachkovska

Private Higher Educational Institution “European University”, Rivne, Ukraine, e-mail: it-eufimb@rambler.ru

MATHEMATICAL MODEL FOR MINERAL RESERVES EVALUATION

Мета. Розробка моделі та обчислювального алгоритму для оцінки запасів бурштину на основі використання ортогональних сіткових схем родовища.

Методика. Використані методи математичної статистики та математичного моделювання. Вибір вагової функції, що забезпечує отримання найменшої дисперсії оцінки середнього, являє собою складну математичну задачу.

Результати. Сформульована та вирішена задача оцінки запасів корисного компоненту, що дисперсно розсіяні по області родовища прямокутної форми із заданими свердловинами, розміщеними у шаховому порядку. Розроблений алгоритм побудови відповідного числового конформного відображення.

Наукова новизна. Для оцінки запасів бурштину було використано один з методів математичного моделювання – метод скінченних різниць із використанням числових конформних відображень, що пов’язано із задачею конформного відображення однозв’язної області на параметричний прямокутник площини.

Практична значимість. Застосований метод побудови різницевих сіток за допомогою числових конформних відображень знаходить своє застосування до задач оцінки запасів у випадку криволінійної форми родовища корисних копалин, що найчастіше має місце у практиці.

Ключові слова: *ортогональність ліній сітки, гармонічні функції, числовий розв’язок, апроксимація, конформне відображення, математична модель*

Постановка проблеми. Згідно із законодавством України про надра, усі організації, що здійснюють їх геологічне вивчення, незалежно від форм власності, зобов’язані забезпечити повноту геологічної будови надр, достовірність визначення кількості та якості основних і разом з ними залягаючих корисних копалин та корисних компонентів, що містяться в них. Оконтурювання запасів у надрах зводиться до проведення загального промислового контуру, яким запаси корисної копалини обмежуються від вміщуючих порід. Блокування запасів зводиться до виділення в загальному контурі ділянок блоків, різних за будовою, морфологією, ступенем розвіданості та складом корисної копалини. На відміну від підрахунку розвіданих і попередньо оцінених запасів, прогнозні ресурси в надрах не геометризуються.

Усі способи підрахунку запасів зводяться до двох головних операцій: до проектування складних за формою накопичень корисних копалин у рівновеликі їм за об’ємом, але більш прості за формою геологічні тіла, та до системи розрахунків, що забезпечують правомірне розповсюдження геологорозвідувальних параметрів, отриманих за окремими розвідувальними перерізами, на прилеглі до них об’єми надр.

Існуюча методика обґрунтування кондицій недосконала, тому що вона не забезпечує однозначного вирішення при виборі оптимального варіанта через відсутність єдиного критерію економічної оцінки родовища. Оперування безліччю взаємопов’язаних кондиційних показників призводить до багатьох варіантів та виключає можливість їх повного перебору, а у значеннях основних кондиційних показників – до оконтурювання запасів, недостатньо конкретизований їх гірничотехнічний та економічний зміст, що часто утруднює оцінку кількості та якості вилучення запасів. Вихідними геологорозвідувальними параметрами підрахунку запасів є: об’єми продуктивних зон, покладів чи блоків; об’ємна маса корисної копалини; вміст корисного компонента. Перші два параметри очевидні, основні ідеї яких закладені в їх назвах. Зупинимося на третьому параметрі.

Аналіз останніх досліджень. Вибір вагової функції, що забезпечує отримання найменшої дисперсії оцінки середнього, являє собою складну математичну задачу, яка поки що не має загального вирішення. Стосовно конкретних умов розвідки багатьох рудних родовищ вона вирішена Ж. Матероном.

Виділення невирішеної раніше частини загальної проблеми. Вміст корисних компонентів за розвіданими перерізами визначається за результатами аналізу проб стосовно бурштинових розсипів. При розповсюдженні вмістів корисних компонентів, встановлених за розвідувальними перерізами, на прилягаючі до них об'єми надр виникають погрішності їх оцінок. Погрішності лінійної інтерполяції виникають через те, що просторова мінливість вмістів наслідує більш складні закони. Крім того, на погрішності лінійної інтерполяції накладаються погрішності, що виникають у результаті невідповідності середнього вмісту корисного компонента в об'ємах проб середньому вмісту в об'ємах оцінюваних блоків. У загальному випадку проби з низьким вмістом призводять до недооцінки, а проби з високим вмістом – до переоцінки середнього вмісту в оцінюваних об'ємах надр.

Формулювання мети роботи. Необхідно розглянути постановку граничних умов для забезпечення існування оберненого конформного відображення, що реалізується за допомогою відповідних граничних умов, наближеного значення початкового вибору модуля області з метою подальшого його уточнення. Обчислювальний алгоритм побудови чисельного конформного відображення для математичної моделі визначається із розміщення вузлів у параметричному прямокутнику.

Виклад основного матеріалу. Вибір вагової функції, що забезпечує отримання найменшої дисперсії оцінки середнього, являє собою складну математичну задачу, яка поки що не має загального вирішення. Стосовно конкретних умов розвідки багатьох рудних родовищ вона вирішена Ж. Матероном і отримала назву „крайгінгу". Крайгінг полягає в пошуку найкращої оцінки вмісту корисної копалини у блоці, що обраховується, з урахуванням його вмісту у пробах, розміщених як усередині, так і зовні оцінюваного блоку. Сенс крайгінга полягає в тому, що вмісту кожної проби приписується така маса, за якої забезпечується мінімальна дисперсія оцінки середнього вмісту. Визначення маси проб здійснюється методами геостатистики з урахуванням геометричних форм, розмірів і взаємного розміщення проб та оцінюваного блоку. У загальному випадку, чим більше віддалена проба від центру блоку, тим менша приписувана їй вага.

Задача крайгінга для геометрично однорідного поля зводиться до знаходження найкращої лінійної оцінки дійсного середнього вмісту Z у блоці за рядом проб із вмістом x_1, x_2 ...x_n, розміщених усередині та зовні оцінюваного блоку. Вагові коефіцієнти a_1, a_2...a_n володіють двома умовами:

- істинний вміст Z і його оцінка Z* повинні мати однакове середнє значення у всьому геометричному полі, тобто середнє значення похибки Z-Z* повинно бути рівним нулю;

- коефіцієнти крайгінга повинні мати такі значення, щоб дисперсія оцінки істинного вмісту D(Z-Z*) приймала б мінімальне значення. Ця умова записується у вигляді системи рівнянь, лінійних відносно a_i.

Дискретний крайгінг дозволяє отримати оцінку середнього вмісту у квадратній зоні. Безперервний крайгінг дозволяє отримати оцінку середніх вмістів у блоках, розвіданих системами виїмкових камер, пройдених методом МГД, шурфів чи свердловин великого діаметра (розвідувальних виробок). Застосування дискретного та безперервного крайгінга уточнює оцінки середньоблокових вмістів корисних компонентів. Головне практичне значення крайгінга полягає в можливості виключення систематичних похибок значень оцінки середніх вмістів у багатих блоках. Із проблемою вибору вагової функції тісно пов'язана проблема ураганних проб, що часто виникає при розвідці бурштинових розсипів Рівненської області.

„Ураганними" пробами називаються проби з аномально високими вмістами, частка яких у випадковій вибірці істотно вища частки корисної копалини з подібними вмістами корисного компонента в оцінюваних об'ємах. За наукову основу виявлення та обліку ураганних проб може бути прийнятий принцип мінімізації дисперсії оцінки середнього вмісту корисного компонента у блоках з ураганними пробами. Для цього необхідно знати розміри фактичних зон впливу ураганних проб, ураховувати вплив геометрії та кількості певних проб. Таких способів виявлення та обліку ураганних проб поки не розроблено.

У першому наближенні ця задача може бути вирішена за допомогою операції крайгінга. На основі викладеного, рамки досліджень, представлених у запропонованому методі, обмежені наступними задачами:

- математичним і комп'ютерним моделюванням оцінки запасів корисних копалин методами дискретного крайгінга;

- математичним і комп'ютерним моделюванням оцінки запасів корисних копалин методами безперервного крайгінга;

- переоцінки запасів бурштину на базі аналізу результатів математичного моделювання в напрямі розширення меж мінімального промислового і бортового вмісту бурштину.

У даному методі для більш точної оцінки запасів корисних копалин родовищ, що залягають в областях із криволінійними межами, сумісно з теорією крайгінгу використано один із методів математичного моделювання – метод скінченних різниць із використанням числових конформних відображень плоских криволінійних областей на параметричний прямокутник. В основі цього лежить перетворення вихідної крайової задачі до нових незалежних змінних ξ, η області G_ζ комплексного потенціалу – параметричного прямокутника та розв'язання перетвореної задачі в ньому.

У зв'язку з цим, спочатку потрібно побудувати числове конформне відображення області G_Z на параметричний прямокутник, що розглядається окремою задачею. При цьому використано ортогональні різницеві сітки всередині області з „плаваючими" вузлами по фізичному профілю межі області родовища. Розглянуто два алгоритми побудови числового конформного відображення.

Перший алгоритм базується на числовому розв'язанні двох послідовностей крайових задач Діріхле для рівнянь Лапласа та чергуванні внутрішніх і зовнішніх ітераційних процесів з уточнення координат внутрішніх вузлів різницевої сітки та „плаваючих" вузлів по межі області. Для покращення надійності роботи алгоритму у випадку областей з нерегулярними межами зручно користуватись постановками з фіксованим положенням межових вузлів в околі кутових точок областей.

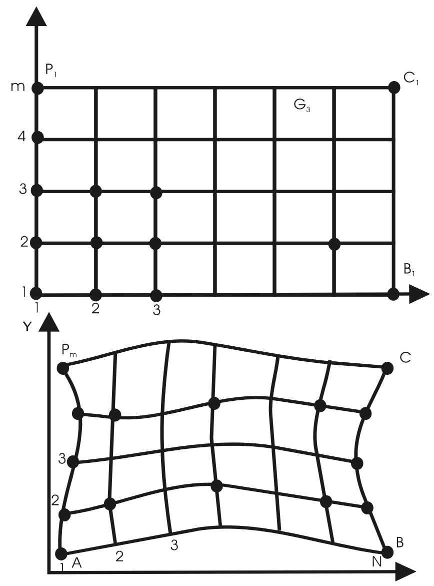

Рис. 1. Фізична область родовища прямокутної та криволінійної форми: A, B, C, B_1, C_1 – точки контуру ділянки родовища; m, N – кількість блоків сітки в напрямку координатних осей

Другий алгоритм ґрунтується на мінімізації варіаційного функціоналу Рімана та послідовному чергуванні внутрішніх і зовнішніх ітераційних процесів з уточнення координат внутрішніх вузлів та межових вузлів як „плаваючих". Алгоритми програмно реалізовані в системі програмування Delphi 7.0 [1].

На рис. 1 подано родовище прямокутної форми з розміщеними на ньому камерами виймання в шаховому порядку – родовище, обмежене довільною кривою, у формі однозв'язної області. У результаті пошукових робіт деякі точки родовища взяття проб закоординовані $M(x_i, y_j, z_k)$ із відомим вмістом у них бурштину ρ_{ij}^k по глибині камери. Задача полягає в тому, щоб оцінити вміст бурштину в заданому родовищі.

Оцінимо вміст бурштину в родовищі, видима верхня частина якого зображена на рис. 1, методом дискретного крайгінгу [3]. Згідно з даним методом оцінимо спочатку вміст бурштину у виділеному блоці. Згідно з методом крайгінга отримаємо знаходження найкращої оцінки середнього вмісту бурштину або потужності корисної копалини у блоці з використанням результатів вишукувань як в середині, так із зовні оцінюваного блоку. Згідно з даним методом, дані результати враховуються з вагами, що забезпечує мінімум дисперсії середнього значення. При цьому в даному випадку крайгінг реалізується при дискретній системі розвідки родовищ корисних копалин.

Як відомо дискретний (точковий) крайгінг застосовується при інтерполяції вишукуваних даних у задані точки тіл корисних копалин. Доцільність його застосування виникає як на стадії виявлення ділянок залягання корисних копалин, так і на стадії їх експлуатації, коли вирішуються проблеми селективної розробки рудних тіл.

Якщо в результаті проведення пошукових робіт родовище покрито камерами по квадратній сітці розмірами $m \times n$, де $n = 2n_1 + 1$, $m = 2m_1 + 1$, то проблема крайгінга полягає у визначенні ваг, що повинні бути приписані значенням ознаки в центральній камері *K*, у найближчих оточуючих її камерах L_1, L_2, L_3, L_4 і камерах другої обрамляючої зони M_1, M_2, M_3, M_4 для отримання найкращої оцінки середнього значення ознаки в зоні впливу камери *K*. При цьому достатньо обмежитися врахуванням тільки двох найближчих до оцінюваного блоку (зона впливу камери *K*) ореолів, оскільки, у більшості випадків, використання даних за більш віддаленими камерами не приносить помітного уточнення оцінки.

Нехай відомий вміст бурштину в камерах на деякій відмітці *H* від поверхні Землі: ρ_{ij}^k. Тут індекси i, j відповідають за горизонтальні координати, k – за вертикальну. Нехай $u = \rho_{ij}^k$ – вміст бурштину в центральній камері оцінюваного блоку

$$V = \frac{1}{4}\left(\rho_{i-1,j}^k + \rho_{i+1,j}^k + \rho_{i,j-1}^k + \rho_{i,j+1}^k\right) \ , \qquad (1)$$

де *V* – середній вміст бурштину у всіх чотирьох камерах виймання ореолу L, що містить точки L_1, L_2, L_3, L_4, в яких знаходяться свердловини,

$$w = \frac{1}{4}\left(\rho_{i-1,j-1}^k + \rho_{i+1,j-1}^k + \rho_{i-1,j+1}^k + \rho_{i+1,j+1}^k\right) \ , \qquad (2)$$

де *W* – середній вміст бурштину у всіх чотирьох камерах виймання ореолу M, що містить точки M_1, M_2, M_3, M_4, в яких знаходяться камери.

Згідно з теорією крайгінга середній вміст корисного компоненту в оцінюваному блоці розраховується за наступною формулою

$$p = (1 - \lambda - \mu) \cdot u + \lambda \cdot v + \mu w \quad . \qquad (3)$$

Асимптотичні формули коефіцієнтів крайгінга λ і μ в умовах моделі де Війса для випадку, коли є центральна та всі свердловини (камери) обох оточуючих її ореолів *L* і *M* при малих значеннях t, мають вигляд

$$\lambda = \frac{(0{,}4277 - \ln t)(0{,}5173 - 0{,}25\ln t)}{0{,}9121 - 1{,}4739\ln t + 9/16 \cdot \ln^2 t}; \qquad (4)$$

$$\mu = \frac{(0{,}4277 - \ln t)(0{,}0841 - 0{,}25\ln t)}{0{,}9121 - 1{,}4739\ln t + 9/16 \cdot \ln^2 t}, \tag{5}$$

а для великих t: $\lambda = 0{,}407$, $\mu = 0{,}017$.

При цьому дисперсія крайгінга в першому випадку дорівнює

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}1777 - \ln t - (\lambda - \mu)(0{,}4277 - \ln t),$$

а в другому випадку

$$\frac{1}{3\alpha}\sigma_k^2 = 0{,}311\frac{1}{t}\cdot$$

Тут $t = \dfrac{T}{h}$, де T– потужність пласта корисної копалини; h – крок сітки.

Тоді сумарні запаси родовища обчислюються за формулою

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m_1} p_{2k,2l}, \tag{6}$$

де $n_1 = [n/2],\ m_1 = [m/2]$.

Таким чином, задача оцінки запасів бурштину, дисперсно розсіяних по області родовища прямокутної форми із заданими камерами виймання, розміщеними у шаховому порядку, дається формулою (6) з урахуванням (2)–(5).

Для формалізації описаних вище постановок задачі оцінки запасів бурштину у випадку задання криволінійного контура межі області родовища, будемо розглядати горизонтальний переріз родовища, як однозв'язну область G_z, обмежену кусково-гладкою Жордановою кривою на площині (x,y). Межі цієї області можуть бути задані рівняннями як в явному вигляді

$$y = f_i(x), i = \overline{1,k}, \tag{7}$$

в неявному вигляді

$$g_i(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma_z^i, i = \overline{1,k}, \tag{8}$$

а також в параметричному вигляді

$$x = \phi_i(t), y = \psi_i(t). i = \overline{1,k}. \tag{9}$$

Крім того, межа цієї області G_z може апроксимуватися достатньо густою таблицею точок

$$\begin{aligned}
&\left\{(x_{i0}, y_{i0}), i = \overline{0,n}\right\}\ (x_{i0}, y_{i0}) \in \Gamma_z^{-1};\\
&\left\{(x_{im}, y_{m0}), i = \overline{0,n}\right\}\ (x_{im}, y_{im}) \in \Gamma_z^{2};\\
&\left\{(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{0,m}\right\}(x_{0j}, y_{0j}) \in \Gamma_z^{3};\\
&\left\{(x_{nj}, y_{nj}), j = \overline{0,m}\right\}(x_{nj}, y_{nj}) \in \Gamma_z^{4}.
\end{aligned} \tag{10}$$

У результаті проведення пошукових робіт для кожної камери виймання відомий розподіл вмісту бурштину ρ_{ij}^k за її глибиною. Методикою розподілу свердловин у фізичній області родовища G_z, тобто заданням їх координат (x_{ij}, y_{ij}), розпорядимося пізніше.

Для оцінки запасів бурштину у цьому випадку використаємо один з методів математичного моделювання – метод скінченних різниць з використанням числових конформних відображень. У зв'язку з цим, розглянемо задачу числового конформного відображення однозв'язної області G_z на параметричний прямокутник G_ς площини (ξ,η).

Розроблені різні варіанти постановок задачі числового конформного відображення параметричного прямокутника G_ς на криволінійний чотирикутник G_z, кожен з яких має своєю метою побудувати різницеву сітку у криволінійному чотирикутнику, що дає числове конформне відображення прямокутника G_ς на G_z при відповідному заданні границі області G_z і квадратній або прямокутній сітці в G_ς.

Нехай границя Γ_z області G_z представляє собою замкнуту кусково-гладку Жорданову криву із заданими трьома точками A, B, D, що переходять при відображенні, відповідно, у точки A_1, B_1, D_1 параметричного прямокутника. Так як таке відображення єдине, то точка C знаходиться із відповідності вершині C_1 параметричного прямокутника із умови „плавання“ по контуру області. Алгоритм побудови такого відображення та його програмна реалізація наведена в [2].

Після закінчення чисельного конформного відображення та отримання конформної різницевої сітки здійснено координування камер у вузлах отриманої сітки.

Нехай потрібно відобразити конформно криволінійну чотирикутну область родовища G_z площини (x,y) на параметричний прямокутник G_ξ площини (ξ,η). Позначимо верхню та нижню сторони криволінійного чотирикутника G_z через Γ_z^1 і Γ_z^2, ліву та праву – через Γ_z^3, Γ_z^4. Відповідні сторони параметричного прямокутника G_ξ позначимо, відповідно, через $\Gamma_\xi^1 - \Gamma_\xi^4$.

Чотирикутник G_z можна конформно відобразити на параметричний прямокутник $G_\xi = \{0 \le \xi \le a, 0 \le \eta \le b\}$ з відповідним співвідношенням сторін $M = a/b$, що називається модулем прямокутника. Чотирьом фіксованим точкам A_ξ, B_ξ, C_ξ, D_ξ області G_z відповідали вершини A_ξ, B_ξ, C_ξ, D_ξ прямокутника G_z. При цьому відображенні встановлюється взаємнооднозначна відповідність між граничними точками прямокутника G_ξ і області G_z, а також між внутрішніми точками цих областей.

Це відображення реалізується аналітичною функцією $\xi(z) = \xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y)$. Будемо шукати обернене відображення параметричного прямокутника G_ξ площини (ξ, η) на область G_z площини *(x,y)*, що реалізується функцією $z = (\xi) = x(\xi, \eta) + i \cdot y(\xi, \eta)$. У подальшому будемо проводити числовий розрахунок шуканого відображення.

Якщо розглянути пряме конформне відображення області G_z на параметричний прямокутник G_ξ, то ізометрична сітка, що покриє G_z і складається із двох взаємоортогональних сімей ліній, перетворюється в ортогональну сітку прямокутника G_ξ. Знайдуться такі лінії сітки в G_z, що перейдуть в ізолінії $\xi_i = i \cdot h_1, i = \overline{1, n-1}$, $\eta_j = j \cdot h_2, j = \overline{1, m-1}$, $h_1 = const$, $h_2 = const$ – кроки сітки в G_ξ. Навпаки, вибравши координатну сітку у прямокутнику G_ξ, ортогональну та рівномірну з кроками h_1, h_2 за двома координатами, будемо шукати прообрази координатних ліній у криволінійному чотирикутнику G_z.

Отже, задача числового розрахунку конформного відображення параметричного прямокутника G_ξ на криволінійний чотирикутник G_z зводиться до обчислення:

1) модуля *M* області G_z;

2) координат внутрішніх вузлів $x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j)$ різницевої сітки;

3) координат „плаваючих“ вузлів $x(\xi_0, \eta_j)$, $y(\xi_0, \eta_j)$, ... границі Γ_z області G_z.

Розглянемо різні варіанти постановки задачі про числове конформне відображення параметричного прямокутника G_ξ на криволінійний чотирикутник G_z. Кожен з варіантів має своєю метою побудувати різницеву сітку у криволінійному чотирикутнику G_z, що дає конформне відображення прямокутника G_ξ на G_z при відповідному заданні границі області G_z і квадратній або прямокутній сітці в G_ξ. Границя Γ_z області G_z представляє собою замкнуту кусково-гладку Жорданову криву із заданими трьома точками A_z, B_z, D_z, що переходять при відображенні в точки A_ξ, B_ξ, D_ξ параметричного прямокутника G_ξ. Так як таке відображення єдине, то точка C_z знаходиться із відповідності вершині C_z, тобто C_z є „плаваюча“ вершина чотирикутної області G_z. У параметричному прямокутнику, у залежності від необхідності густини вибору координатної сітки та управління розміщенням точки C_z, вибирають ділення сторін $A_\xi B_\xi = n \cdot h_1$, $A_\xi D_\xi = m \cdot h_2$, де h_1, h_2 – кроки сітки.

Таким чином, для чисельної побудови конформного відображення за допомогою різницевої сітки для однозв'язної області необхідно зафіксувати довільно три точки границі, що відповідають трьом вершинам прямокутника, вибрати модуль області G_z, тобто $M = \dfrac{n}{m}$. Сітка повинна бути ортогональною в області G_z. Границя Γ області G_z складається з чотирьох кусково-гладких Жорданових кривих, заданих рівняннями $g_i(x, y) = 0,\ (x, y) \in \Gamma_z^i,\ i = \overline{1,4}$.

Стиковані кінці вказаних кривих дадуть чотири фіксовані точки A_z, B_z, C_z, D_z. Для розв'язання задачі у криволінійному чотирикутнику потрібно так визначити відношення *a/b* сторін параметричного прямокутника G_ξ, щоб існувало потрібне відображення з відповідністю вершин прямокутника точкам A_z, B_z, C_z, D_z.

У наведеній постановці для криволінійного чотирикутника вузли передбачаються „плаваючими” по всьому контуру границі області G_z. Модуль області визначений постановкою задачі, але невідомий (шукається у ході побудови відображення). До даної постановки зводиться побудова різницевої конформної сітки в будь-якій скінченій однозв'язній області G_z, обмеженій кусково-гладкою Жордановою кривою *Г*, що розрізана на чотири частини довільним чином. Границя $\Gamma = \Gamma_z^1 \cup \Gamma_z^2 \cup \Gamma_z^3 \cup \Gamma_z^4$ області G_z апроксимується достатньо густою таблицею точок $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_z^i$

$$\left\{(x_{i0}, y_{i0}), i = \overline{0, n}\right\} \text{ для } \Gamma_z^1;$$
$$\left\{(x_{im}, y_{im}), i = \overline{0, n}\right\} \text{ для } \Gamma_z^2;$$
$$\left\{(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{0, m}\right\} \text{ для } \Gamma_z^3;$$
$$\left\{(x_{nj}, y_{nj}), j = \overline{0, m}\right\} \text{ для } \Gamma_z^4.$$

Шукається конформне відображення параметричного прямокутника G_ξ на область G_z з відміченими чотирма точками A_z, B_z, C_z, D_z при заданому модулі *M* та чотирьох вершинах.

У відповідності до теореми Рімана про відображення заданих однозв'язних областей, єдиність конформного відображення забезпечується відповідністю трьох граничних точок образу та прообразу. Розв'язок задачі про конформне відображення чотирикутної області G_z на параметричний прямокутник G_ξ з відповідністю чотирьох точок A_z, B_z, C_z, D_z вершинам прямокутника G_ξ не завжди існує. Таке відображення, як відомо, існує тільки тоді, коли модулі цих областей співпадають, тобто $M = \dfrac{a}{b}$, або при виборі квадратної координатної сітки в G_ξ $M = \dfrac{n}{m}$.

У першому варіанті постановки задачі розв'язок єдиний і на вибір сітки криволінійних координат у

G_z можна вплинути вибором точок A_z, B_z, C_z, D_z, вибором співвідношення *a/b* та вибором густини сітки за рахунок вибору числової величини натуральних чисел *n* та *m*. При цьому вибір відношення *a/b* визначить положення точки C_z на границі *Г*. Внутрішні вузли сітки знаходяться із алгоритму розв'язку задачі. Граничні вузли сітки мають власний алгоритм для знаходження однієї із двох координат, а друга координата знаходиться з умови належності границі (умови „плавання" по контуру Γ_z).

Другий варіант постановки задачі передбачає фіксований вибір чотирьох точок границі Γ_z. Це пов'язане з тим, що границя області G_z у багатьох крайових задачах математичної фізики має конкретний фізичний зміст, де криві Γ_z^1, Γ_z^2 є силовими лініями, а Γ_z^3, Γ_z^4 – потенціальними лініями (або навпаки) деякого поля.

Тоді алгоритм розв'язку задачі повинен вказувати на наближене знаходження відношення *a/b* так, щоб „плаваючий" вузол *C* прямував до точки C_z. Отже, існування та єдиність розв'язку задачі в цій постановці випливає з алгоритму наближення розв'язку задачі в першій постановці.

Висновки та перспективи розвитку напряму. Застосований метод побудови різницевих сіток за допомогою числових конформних відображень знаходить своє застосування у задачах оцінки запасів у випадку криволінійної форми родовища корисних копалин, що найчастіше має місце у практиці. Допускається, що камери розміщені у вузлах побудованої конформної різницевої сітки. У випадку невиконання останньої вимоги, поряд із побудованою конформною різницевою сіткою використовується тріангуляція Делоне для так званої „зони впливу" кожної камери. Після чого оцінюється вміст бурштину в кожному блоці, обмеженому „зоною впливу" кожної камери.

Список літератури / References

1. Власюк А.П. Основи сучасного візуально-подвійного програмування. Програмування в середовищі Delphi / Власюк А.П., Прищепа О.В. – Рівне: НУВГП, 2008. – 496 с.

Vlasiuk, A.P. and Pryshchepa, O.V. (2008), *Osnovy suchasnoho vizualno-podviinoho prohramuvannia. Prohramuvannia v seredovyshchi Delphi* [Fundamentals of Modern Visual Doble Programming. Programming in Delphi], NUVGP, Rivne, Ukraine.

2. Власюк А.П. Математичне і комп'ютерне моделювання оцінки запасів сипучих корисних копалин та процесу їх видобутку / А.П. Власюк, М.Г. Лустюк // Abstracts of International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2005), Berdyansk. – 2005. – С. 107–109.

Vlasiuk, A.P. and Lustiuk, M.G. (2005), "Mathematical and computer modeling evaluation of bulk minerals and process their output", *Abstracts of International Conference "Problems of decision making under uncertainties"* (PDMU-2005), Berdyansk, Ukraine.

Цель. Разработка модели и вычислительного алгоритма для запасов янтаря на основе использования ортогональных сеточных схем месторождения.

Методика. Использованы методы математической статистики, математического моделирования. Выбор весовой функции, которая обеспечивает получение наименьшей дисперсии оценки среднего, представляет собой сложную математическую задачу.

Результаты. Сформулирована и решена задача оценки запасов полезного компонента, дисперсно рассеянного по области месторождения прямоугольной формы с заданными скважинами, расположенными в шахматном порядке. Разработан алгоритм построения соответствующего численного конформного отображения.

Научная новизна. Для оценки запасов янтаря был использован один из методов математического моделирования – метод конечных разностей с использованием численных конформных отображений, что связано с задачей конформного отображения односвязной области на параметрический прямоугольник плоскости.

Практическая значимость. Применений метод построения разностных сеток с помощью числовых конформных отображений находит свое применение в задачах оценки запасов в случае криволинейной формы месторождения полезных ископаемых, что чаще всего имеет место на практике.

Ключевые слова: *ортогональность линий сетки, гармоничные функции, числовое решение, аппроксимация, конформное отображение, математическая модель*

Purpose. To develop the model and computation algorithm for evaluation of reserves of amber using orthogonal grid schemes of deposits.

Methodology. We have applied the methods of mathematical statistics and modeling. The choice of the weight function that provides minimal variance of the mean estimator is a complex mathematical problem.

Findings. The problem of estimation of the reserves of the mineral dispersed within a deposit of rectangular form with staggered wells has been formulated and solved. The algorithm of conformal mapping has been developed.

Originality. To estimate the amber reserves we have applied one of the mathematical modeling methods, namely the finite difference method and numerical conformal mapping. This is related to the problem of numerical conformal mapping of a simply connected plane polygon into the parametric rectangle.

Practical value. The method of constructing grids using numerical conformal mappings can be applied to the reserves evaluation problems in case of mineral deposits of curvilinear form, which often occur in practice.

Keywords: *orthogonal grid lines, harmonic functions, numerical solution, approximation of conformal mapping, mathematical model*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук І.О. Садовенком. Дата надходження рукопису 16.01.13.