

we have obtained the variance of the mixture and moisture characteristics of the electromechanical actuator-screw extruder with and without correction of the speed rates of the dispenser's driven elements. We have obtained the dependence of the electricity specific consumption during the production of solid fuel on the performance of the production line and raw material moisture.

**Originality.** The effective proportions of the biofuel's components have been found out. The analytical dependence has been received in order to provide connected dosing through the utilization of adjustable electric drives. This lets us to extend the

range of humidity of the base component and to reduce the energy consumption.

**Practical value.** We have suggested and described the new method of the two-component solid biofuels preparation. It also lets us to reduce the energy costs for technological process and to improve its quality indicators.

**Keywords:** *dispenser, solid biofuel, efficiency, humidity, variance, simulation model, neural controller, electric drive, inverter*

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук П.С. Євтухом. Дата надходження рукопису 07.03.13.*

УДК 519.642.2: 621.3.011.713

С.М. Тиховод<sup>1</sup>, канд. техн. наук, доц.,  
Н.А. Костин<sup>2</sup>, д-р техн. наук, проф.

1 – Запорозький національний технічний університет, г. Запоріжжє, Україна, e-mail: stikhovod@gmail.com

2 – Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту, г. Дніпропетровськ, Україна

## МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И ЕГО СХЕМНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

S.M. Tikhovod<sup>1</sup>, Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,  
N.A. Kostin<sup>2</sup>, Dr. Sci. (Tech.), Professor

1 – Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye, Ukraine, e-mail: stikhovod@gmail.com

2 – Dnipropetrovsk National University of Railway Transport, Dnipropetrovsk, Ukraine

## NUMERICAL CALCULATIN AND CIRCUIT INTERPRETATION OF TRANSIENTS IN ELECTRIC CIRCUITS

**Цель.** Разработка универсального программного комплекса Colo-IDU для повышения быстродействия расчета переходных процессов в сложных электрических цепях.

**Методика.** Использована полиномиальная аппроксимация функции зависимости решения от времени и математический аппарат матричной алгебры. Интегро-дифференциальные уравнения динамики электрических процессов записываются в матричной форме с помощью полиномиального представления функции решения, производной и интеграла функции решения в ряде дискретных точек времени расчета.

**Результаты.** Проведенные расчеты переходных процессов в моделируемой цепи показали, что при одинаковой достигнутой точности процессорное время расчета переходного процесса предложенным методом более чем в четыре раза меньше, чем при использовании многошагового метода Гира. Выполненное сравнение численного решения с точным решением, полученным аналитически, подтверждает адекватность предложенного метода и разработанного на его основе программного комплекса.

**Научная новизна.** Модификация численного метода расчета интегро-дифференциальных уравнений, известного как ФДН (формулы дифференцирования назад), и разработка на его основе схемной модели численного метода расчета переходных процессов в электрических цепях. Схемная модель позволяет перейти от электрической цепи, в которой процессы описываются интегро-дифференциальными уравнениями, к схеме замещения с изображениями токов в виде векторов. Векторы-изображения содержат коэффициенты полиномиальной аппроксимации зависимостей токов от времени. Показано, что для изображений токов справедливы законы Кирхгофа, приводящие к алгебраическим уравнениям.

**Практическая значимость.** Разработанный метод открывает возможность использования всего многообразного аппарата теории цепей для работы с изображениями токов, на основании чего разработан универсальный программный комплекс Colo-IDU для расчета переходных процессов в сложных электрических цепях.

**Ключевые слова:** *переходный процесс, численные методы, схемная модель, полиномиальная аппроксимация*

**Постановка задачи.** Переходные электромагнитные процессы в электротехнических системах,

приводящие к броскам тока при коммутациях, представляют значительную опасность для оборудования, а также влияют на надежность релейной защиты, поэтому исследование этих процессов актуаль-

но. Современное компьютерное моделирование позволяет существенно сократить финансовые затраты и время на дорогостоящее физическое моделирование. Для этого используется ряд готовых программных комплексов, таких как PSpice [1], Simulink [2] и др. Уравнения состояния, составляемые по законам Кирхгофа для мгновенных значений, являются интегро-дифференциально-алгебраическими уравнениями, которые во многих случаях бывают жесткими. Обычно системы таких уравнений преобразуют в системы дифференциальных уравнений первого порядка, но при этом порядок системы уравнений возрастает. Для решения таких систем в программных комплексах широко применяются многошаговые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений с использованием полиномиальной аппроксимации решения. В результате получены различные разностные схемы [3], позволяющие вычислить значение искомой функции в одной временной точке по известным значениям функции (или ее производных) в нескольких предыдущих точках.

Реальные исследуемые цепи могут содержать несколько сотен элементов, что приводит к большим системам дифференциальных уравнений. Переходные процессы в электромагнитных устройствах могут быть весьма продолжительными, и время моделирования таких процессов может быть значительным, что нежелательно. Поэтому разработка усовершенствованного более быстродействующего метода расчета переходных электромагнитных процессов является актуальной задачей.

Для инженеров-электриков, которым важен физический смысл математических действий, представляется более наглядным, если какая-либо математическая операция заменяется схемной моделью. Например, расчет переходных процессов методом преобразования Лапласа сопровождается операторной схемой замещения. При этом в схеме замещения соответствующий процесс должен быть такой, чтобы он полностью описывался алгебраическими уравнениями. Схемная модель позволяет от электрической цепи, в которой процессы описываются интегро-дифференциальными уравнениями, перейти к цепи с изображениями токов, для которых справедливы законы Кирхгофа, приводящие к алгебраическим уравнениям. Это открывает возможность использования многообразного аппарата теории цепей для работы с изображениями токов. Поэтому, модификация численного метода, сопровождающаяся созданием адекватной схемной модели, „дружественной“ для инженеров-электриков, является ценной.

**Цель данной работы** – модификация численного метода численного решения интегро-дифференциальных уравнений, использующего полиномиальную аппроксимацию решения, а также разработка схемной модели метода, создающая удобство при моделировании, что приводит к сокращению времени моделирования.

**Изложение основного материала.** Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую резистивный ( $R$ ), индуктивный ( $L$ ) и емкостный ( $C$ ) элементы, включенные последовательно. Пусть до коммутации конденсатор был заряжен до напряжения  $u_c(0) = u_{C0}$ . При подключении при  $t=0$  источника переменной ЭДС  $e(t)$  в цепи происходит переходный процесс, который описывается линейным интегро-дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt + u_c(0) = e(t) \quad (1)$$

Будем искать решение во временной области, состоящей из  $N$  одинаковых шагов  $h$ . Узловые точки, являющиеся границами шагов, обозначим  $t_0, t_1, \dots, t_N$ .

Решение для тока, как функцию от времени, в интервале времени  $[t_0, t_N]$  аппроксимируем полиномом  $N$ -ой степени

$$i(t) \approx p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N \quad (2)$$

Для аппроксимирующего полинома (2) зададим условие в точках  $t_k$  деления интервала изменения аргумента

$$i(t_k) = p(t_k) \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Если условие (3) для выражения (2) записать для каждой точки  $t_k$ , то получим систему линейных алгебраических уравнений, если принять, что  $t_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= i(t_0) = i_0 \\ a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_N h^N &= i(t_1) \\ a_0 + a_1 (2h) + a_2 (2h)^2 + \dots + a_N (2h)^N &= i(t_2) \\ \dots & \\ a_0 + a_1 (Nh) + a_2 (Nh)^2 + \dots + a_N (Nh)^N &= i(t_N) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вычтем из уравнений системы (4) первое уравнение и получим сокращенную систему, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} h & h^2 & \dots & h^N \\ 2h & (2h)^2 & \dots & (2h)^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Nh & (Nh)^2 & \dots & (Nh)^N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(h) - i_0 \\ i(2h) - i_0 \\ \dots \\ i(Nh) - i_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

или

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} - i_0, \quad (5')$$

где  $\mathbf{V}$  – матрица Вандермонда без первой строки и первого столбца;  $\mathbf{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$  – вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома;  $\mathbf{I} = [i(h) \ i(2h) \ \dots \ i(Nh)]^T$  – вектор значений тока в опорных точках 1, 2, ...N.

Будем считать, что номер  $k$  отрезка, на которые разделен интервал изменения аргумента, совпадает с номером точки деления  $t_k$ , расположенной справа отрезка.

Продифференцируем выражение (2)

$$\frac{di}{dt} = a_1 + 2a_2t + \dots + Na_N t^{N-1} \quad (6)$$

Если в выражение (6) подставить значение времени для точек  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , то получим следующую систему линейных уравнений, которая в матричной форме система имеет вид

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ \vdots \\ i'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2h & \dots & Nh^{N-1} \\ 1 & 2 \cdot 2h & \dots & N(2h)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2Nh & \dots & N(Nh)^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

Или

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \mathbf{A}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{I}' = [i'(h) \ i'(2h) \dots \ i'(Nh)]^T$  – вектор производных тока для точек  $k=1, 2, \dots, N$ .

Проинтегрируем выражение (2) от нуля до  $k$ -й точки при изменении номера  $k$  от 1 до  $N$

$$\int_0^{t_k} p(t) dt = \int_0^{t_k} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_N t^N) dt = a_0 t_k + \frac{1}{2} a_1 t_k^2 + \frac{1}{3} a_2 t_k^3 + \dots + \frac{1}{N+1} a_N t_k^{N+1} \quad (9)$$

Подстановка в (9) значений  $k$  от 1 до  $N$  дает

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{t_1} p(t) dt &= a_0 h + \frac{a_1}{2} h^2 + \frac{a_2}{3} h^3 + \dots + \frac{a_N}{N+1} h^{N+1} = J_1 \\ \int_0^{t_2} p(t) dt &= 2a_0 h + \frac{a_1(2h)^2}{2} + \frac{a_2(2h)^3}{3} + \dots + \frac{a_N(2h)^{N+1}}{N+1} = J_2 \\ &\dots \\ \int_0^{t_N} p(t) dt &= a_0 Nh + \frac{a_1(Nh)^2}{2} + \frac{a_2(Nh)^3}{3} + \dots + \frac{a_N(Nh)^{N+1}}{N+1} = J_N \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если учесть, что  $a_0 = i(t_0) = i_0$ , то получим следующую систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{3} & \dots & \frac{h^4}{4} \\ \frac{(2h)^2}{2} & \frac{(2h)^3}{3} & \dots & \frac{(2h)^{N+1}}{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}(Nh)^2 & \frac{1}{3}(Nh)^3 & \dots & \frac{1}{N+1}(Nh)^{N+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + i_0 \begin{bmatrix} h \\ 2h \\ \vdots \\ Nh \end{bmatrix} \quad (11)$$

или

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} \mathbf{A} + i_0 \mathbf{H}, \quad (11')$$

где  $\mathbf{J}$  – вектор интегралов (11) для значений  $k=1, 2, \dots, N$ ;  $\mathbf{H} = [h \ 2h \ \dots \ Nh]^T$ .

Решим уравнение (1) с учетом аппроксимации (2) для точек  $k = 1, 2, \dots, N$ . Получим в матричной форме выражение

$$L\mathbf{I}' + R\mathbf{I} + B\mathbf{J} + u_{C0} = \mathbf{e}, \quad (12)$$

где  $B = 1/C$ ;  $\mathbf{e}$  – вектор значений ЭДС источника в точках  $1, 2, \dots, N$  временного интервала.

Если подставить в выражение (12) матрицы  $\mathbf{I}$  (5'),  $\mathbf{I}'$  (8),  $\mathbf{J}$  (11'), то получим

$$(L\mathbf{T} + R\mathbf{V} + B\mathbf{S})\mathbf{A} = \mathbf{e} - u_{C0} - R\mathbf{i}_0 - B\mathbf{H}i_0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно интерпретировать следующим образом. Пусть в исходной ветви  $R$ - $L$ - $C$  протекает ток  $i(t)$ . Тогда, согласно уравнению (13), исходной ветви соответствует ветвь замещения, в которой проходит операторный ток  $\mathbf{A}$ , изображающий исходный ток  $i(t)$ . При этом в ветви замещения резистивный элемент имеет операторное сопротивление  $R\mathbf{V}$ , и последовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $R \cdot i_0$  (рис. 1).

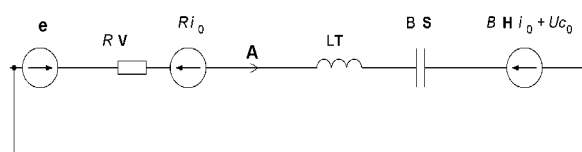


Рис. 1. Интерпретация уравнения (13).  $R\mathbf{V}$ ,  $L\mathbf{T}$ ,  $B\mathbf{S}$  – операторные сопротивления резистивного, индуктивного и емкостного элементов;  $R\mathbf{i}_0$ ,  $B\mathbf{H}i_0 + u_{C0}$  – дополнительные источники ЭДС;  $\mathbf{e}$  – вектор значений ЭДС в узловых точках

Индуктивный элемент имеет операторное сопротивление  $L\mathbf{T}$ , а емкостный элемент –  $B\mathbf{S}$  и последовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $B\mathbf{H}i_0 + u_{C0}$ .

Докажем, что в узлах схемы замещения для изображений  $\mathbf{A}$  соблюдается закон токов Кирхгофа. Для этого воспользуемся уравнением (5'). В любом узле электрической цепи для токов ветвей, принадлежащих узлу, в любой момент времени  $a$ , следовательно, токов в начале интервала  $i_0$  и для векторов токов  $\mathbf{I}$  выполняется закон токов Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^b (\mathbf{I}_k - i_{0k}) = \sum_{k=1}^b \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_k = 0, \quad (14)$$

где  $b$  – количество ветвей, сходящихся к узлу;  $k$  – текущий номер ветви, сходящейся к узлу.

Если уравнение (14) умножить на матрицу, обратную матрице  $V$ , то получим

$$\sum_{k=1}^b A_k = 0. \quad (15)$$

Из изложенного материала сделаем *выводы*. Реальному току  $i(t)$  соответствует векторное изображение  $A$  в схеме замещения, показанной на рис. 1. Все изображения тока  $A$  в схеме замещения удовлетворяют законам Кирхгофа, если схема замещения составляется по следующему правилу:

- источник ЭДС заменяется векторным источником, содержащим значения ЭДС в  $N$  опорных точках;
- резистивный элемент имеет операторное сопротивление  $RV$  и последовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $Ri_0$ ;
- индуктивный элемент имеет операторное сопротивление  $LT$ ;
- емкостный элемент имеет операторное сопротивление  $BS$  и последовательно с ним навстречу току включается источник ЭДС  $B\mathbf{H}i_0 + u_{C0}$ .

Таким образом, в схеме замещения электрической цепи изображения  $A_k$  оригиналов токов  $i_k(t)$  удовлетворяют законам Кирхгофа. Следовательно, при известных значениях токов ветвей  $i_k$  и напряжений на конденсаторах  $u_{Ck}$  в начале интервала  $[t_0, t_N]$  система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, для всех узлов без одного и для всех главных контуров имеет единственное решение. В результате решения системы линейных алгебраических уравнений получаем векторы полиномиальных коэффициентов  $A_k$  для всех ветвей. Зная для любой ветви коэффициенты полинома и значение  $i_0$  в начальной точке  $t_0$ , мы можем получить значение тока и напряжения на конденсаторе во всех произвольных точках любого из  $N$  отрезков в интервале времени  $[t_0, t_N]$ .

Согласно [4], с ростом степени полинома погрешность интерполяции уменьшается, однако увеличивать степень полинома бесконечно нельзя. С ростом числа  $N$  матрицы становятся плохо обусловленными. Матрица  $S$  в выражении (11) содержит шаг интегрирования в степени  $N+1$ . Чтобы при малом шаге  $h$  матрицы  $V$ ,  $T$  и особенно  $S$  не стали плохо обусловленными необходимо шаг интегрирования умножить на нормирующий коэффициент такой, чтобы нормированный шаг был близок к единице. Тогда на нормирующий коэффициент нужно умножить значения всех индуктивностей и емкостей, входящих в схему, а значение частоты нужно разделить на нормирующий коэффициент. Это улучшит обусловленность матриц, но увеличение степени полинома больше десяти может в некоторых случаях все-таки привести к неадекватному решению. Погрешность интерполяции можно существенно снизить, если выбирать положения опорных точек не равномерно, а по методу, разработанному Чебышёвым. В этом случае максимальная погрешность будет минимизирована. Если аргумент  $x$  ап-

роксимируемой функции задан на отрезке  $[-1, 1]$ , то опорные точки  $x_k$  выбираются в нулях полиномов Чебышёва [5]

$$x_k = -\cos\left[\frac{2k+1}{2N+2}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Переход к произвольному интервалу времени  $t \in [a, b]$  производится по формуле

$$t = \frac{\tau x + a + b}{2}, \quad (17)$$

где длина участка обозначена  $\tau = b - a$ .

На больших интервалах изменения независимой переменной  $t \gg N h$  уравнение (13) можно решать методом циклической прогонки, увеличивая каждый раз текущее время на  $N$  шагов. В результате определим коэффициенты аппроксимирующего полинома для всего интересующего интервала времени. В каждом цикле необходимо вычислять новые значения  $i_0$  и  $u_{C0}$ , которые будут использованы в следующем цикле. Значения тока в узловых точках можно вычислить проще согласно (5')

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{A} + i_0. \quad (18)$$

Значения напряжений на конденсаторе в узловых точках вычисляются согласно (11')

$$\mathbf{U}_C = \mathbf{B}\mathbf{J} + u_{C0} = \mathbf{B}(\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{H}i_0). \quad (19)$$

Для испытания разработанной методики в системе Matlab составлено несколько компьютерных программ для расчета переходных процессов в электрических цепях. Рассмотрим расчет переходного процесса некоторой модельной цепи (рис. 2).

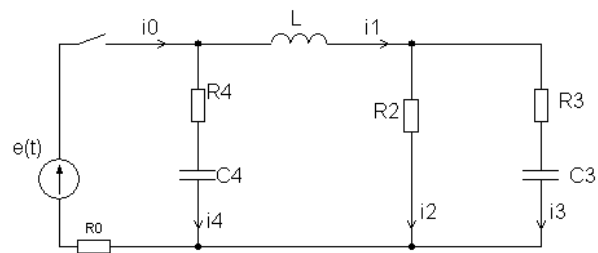


Рис. 2. Модельная цепь, в которой требуется рассчитать переходные токи  $i_0(t) - i_4(t)$

Требуется рассчитать переходный процесс изменения токов после замыкания ключа. Согласно правилу преобразования, показанному на рис. 1, составим схему замещения для изображений токов, показанных на исходной схеме (рис. 3).

На схеме замещения дополнительные источники ЭДС имеют следующие обозначения индексами: первый индекс – „0“ означает, что берется значение тока в точке  $k = 0$  текущего временного интервала; второй индекс обозначает номер ветви в цепи.

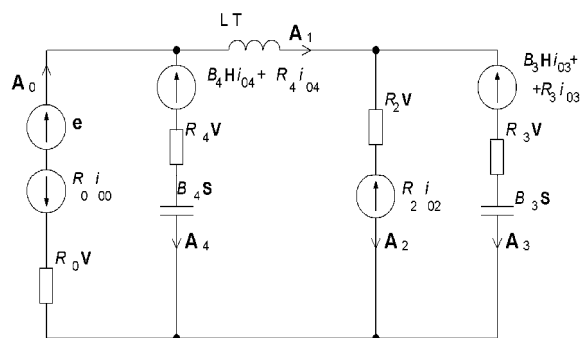


Рис. 3. Схема замещения для модельной цепи:  $A_0$ - $A_4$  – операторные токи ветвей, содержащих операторные сопротивления и ЭДС согласно (13)

Для схемы замещения, показанной на рис. 3, система уравнений, составленная по законам Кирхгофа для изображений токов, имеет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} A_0 - A_1 - A_4 &= 0 \\ A_1 - A_2 - A_3 &= 0 \\ R_0 \mathbf{V} A_0 + R_4 \mathbf{V} A_4 + B_4 \mathbf{S} A_4 &= \mathbf{e} - R_0 i_{00} - R_4 i_{04} - \\ &- B_4 \mathbf{H} i_{04} - u_{C04} \\ R_1 \mathbf{V} A_1 + L \mathbf{T} A_1 + R_2 \mathbf{V} A_2 - B_4 \mathbf{S} A_4 - R_4 \mathbf{V} A_4 &= \\ &= -R_1 i_{01} - R_2 i_{02} + B_4 \mathbf{H} i_{04} + u_{C04} + R_4 i_{04} - \\ - R_2 \mathbf{V} A_2 + R_3 \mathbf{V} A_3 + B_3 \mathbf{S} A_3 &= R_2 i_{02} - R_3 i_{03} - B_3 \mathbf{H} i_{03} \end{aligned} \right\}, (20)$$

где  $i_{00}, i_{01}, i_{02}, i_{03}, i_{04}, u_{C03}, u_{C04}$  – значения токов ветвей 0–4 и напряжений на конденсаторах 3,4 в начале текущего цикла;  $\mathbf{H}$  – вектор шагов.

Система уравнений (20) для изображений токов и напряжений является системой алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, имеет единственное решение – векторы  $A_b$ , где номер ветви  $b=0\dots4$ .

По программе, составленной согласно предложенному алгоритму, выполнен расчет переходного процесса при следующих значениях исходных данных:  $e(t)=100 \sin(2\pi ft+\pi/4)$ ;  $f=50$ ;  $R_1=1 \text{ Ом}$ ;  $R_2=200 \text{ Ом}$ ;  $R_3=1 \text{ Ом}$ ;  $R_4=3 \text{ Ом}$ ;  $C_3=10 \text{ мкФ}$ ;  $C_4=50 \text{ мкФ}$ . График тока  $i_1(t)$ , полученный в результате расчета, представлен на рис. 4.

Для оценки точности вычислений по предложенному методу выполнен также точный аналитический расчет переходного процесса при тех же значениях исходных данных.

Полученное аналитическое выражение для тока  $i_1(t)$  имеет вид

$$i_1(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} + I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (21)$$

где  $A_1 = -0,355 - 1,01j$ ;  $A_2 = -0,355 + 1,013j$ ;  $A_3 = 0,137$ ;  $p_1 = (-348,51 + 3143j) \cdot 10^3$ ;  $p_2 = (-348,51 - 3143j) \cdot 10^3$ ;  $p_3 = -5,548 \cdot 10^3$ ;  $I_m = 0,592 \text{ А}$ ;  $\psi = 1,315$ .

Точки, соответствующие точному аналитическому выражению (21), на графике рис. 4 показаны звездочками. Выполнен также расчет модельной задачи при использовании метода Гира с такой же точностью. Сравнение процессорного времени расчета модельной задачи по предложенному методу и по методу Гира показало, что предложенный метод имеет быстродействие более чем в четыре раза лучшее, чем многошаговый метод Гира.

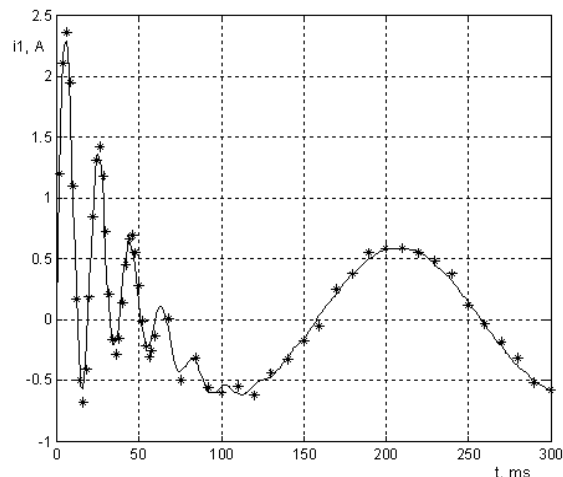


Рис. 4. График тока  $i_1(t)$ , полученный в результате численного расчета. Звездочками показаны точные значения

Предложенная методика формального построения схем замещения может быть использована для разработки компьютерной системы моделирования переходных процессов в схемах произвольной сложности, размер которых ограничивается только ресурсами компьютера. Для этого разработана математическая модель, алгоритм и комплекс компьютерных программ Colo-IDU, подобный комплексу программ Colo [6].

Разработанный программный комплекс выполняет автоматическое составление уравнений состояния цепи и расчет переходного процесса. Особенность математической модели заключается в том, что вместо токов, напряжений и ЭДС электрических цепей рассматриваются их изображения – векторы коэффициентов полиномиальной аппроксимации, а уравнения составляются непосредственно по схеме замещения. Полагаем, что каждая ветвь цепи схемы замещения содержит элемент из трех типов:

- E – тип (ветвь этого типа содержит несколько независимых и управляемых источников напряжения, включенных последовательно; источники напряжения могут быть управляемые током или производной тока);

- Z – тип (ветвь этого типа содержит резистивный (R), индуктивный (L) и емкостный (C) элементы, включенные последовательно). Согласно (13)  $\mathbf{Z} = L\mathbf{T} + R\mathbf{V} + B\mathbf{S}$ ;

- J – тип (ветвь этого типа содержит несколько независимых и управляемых источников тока, вклю-

ченних параллельно; источники тока могут быть управляемыми током).

Перед расчетом исследуемой электрической цепи предварительно вычерчивается ее схема. На схеме проставляются номера узлов, указываются стрелки положительных направлений токов всех ветвей и номера ветвей. Согласно подготовленной схеме в файле DataZ задается матрица входных данных Param. В этой матрице каждой ветви соответствует отдельная строка. В девяти столбцах матрицы для каждой ветви последовательно задаются: номер ветви; номер узла начала ветви; номер узла конца ветви; тип ветви (E, Z или J); численное значение параметра сопротивления, индуктивности и обратного значения емкости; начальное значение тока индуктивности и напряжения на емкости. Параметры независимых и управляемых источников напряжения и тока задаются в отдельных массивах. В программе Solo-IDU строки матрицы исходных данных автоматически сортируются по возрастанию номеров ветвей, а затем, в соответствии с методикой построения „дерева“ [7], ветви расставляются по приоритету: E, Z, J. Результирующая матрица получила идентификатор Prior. Согласно этой матрице строится матрица инцидентий  $A_{inc}$  типа „узел-ветвь“. Целью построения матрицы инцидентий является автоматическое формирование полной системы независимых уравнений, достаточной для расчета изображений токов  $A$  и напряжений  $U=AZ$  во всех ветвях. По методике, изложенной в работе [7], вычисляются матрицы главных сечений цепи  $D_S$  и главных контуров цепи  $B_C$ . Система независимых уравнений, согласно закону токов Кирхгофа (ЗТК), может быть получена с помощью матрицы  $D_S$ , а система независимых уравнений, согласно закону напряжений Кирхгофа (ЗНК), может быть получена с помощью матрицы  $B_C$ . В матричном виде уравнения Кирхгофа имеют вид

$$\left. \begin{aligned} D_S \cdot A &= 0 \\ B_C \cdot U &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

где  $A, U$  – векторы изображений токов и напряжений всех ветвей.

Для построения дерева с помощью матрицы инцидентий  $A_{inc}$ , путем ее элементарных преобразований, строится ступенчатая матрица  $A_{ech}$ . Для этого разработана программа stup. Первые  $n-1$  строк матрицы  $A_{ech}$  соответствуют ветвям дерева, где  $n$  – число узлов цепи. По ступенчатой матрице строится дерево цепи, то есть составляется вектор  $N_{Bt}$ , элементы которого содержат номера ветвей дерева, и вектор  $N_{Zt}$ , элементы которого содержат номера хорд (связей). Далее все связи расставляются по приоритету: J, Z, в результате чего получаем матрицу Prior\_1, в которую входят только строки матрицы Param, расставленные по приоритету: J, Z.

Матрицы  $A_{inc}$ ,  $D_S$  и  $B_C$  можно представить в виде подматриц, соответствующих дереву (индекс t) и связям (индекс l)

$$\left. \begin{aligned} A_{inc} &= [A_t \mid A_l] \\ B_C &= [B_{Ct} \mid 1_\mu] \\ D_S &= [1_\rho \mid D_{Sl}] \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

где  $1_\mu, 1_\rho$  – единичные матрицы.

Согласно правилам, приведенным в [7], подматрицы  $B_{Ct}$  и  $D_{Sl}$  можно получить следующим образом

$$\left. \begin{aligned} D_{Sl} &= A_t^{-1} A_l \\ B_{Ct} &= -D_{Sl}^T \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, имея матрицу инцидентий и дерево цепи, можно получить матрицы сечений и контуров, что достаточно для построения полной системы уравнений Кирхгофа. Рассмотрим единый вектор изображений токов и напряжений

$$X = [A_{Et}, A_{Zt}, A_{Jt}, A_{Zl}, U_{Et}, U_{Zt}, U_{Jl}, U_{Zl}]^T, \quad (25)$$

где  $A_{Et}, A_{Zt}$  – векторы изображений токов ветвей дерева, содержащих источники ЭДС и операторные сопротивления;  $A_{Jl}, A_{Zl}$  – векторы изображений токов связей, содержащие источники тока и операторные сопротивления;  $U_{Et}, U_{Zt}$  – векторы изображений напряжений ветвей дерева, содержащие источники ЭДС и операторные сопротивления;  $U_{Jl}, U_{Zl}$  – векторы изображений напряжений связей, содержащие источники тока и операторные сопротивления.

С использованием единого вектора изображений переменных система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, примет вид

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_S & 0 \\ \hline 0 & B_C \end{array} \right] \cdot X = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) может быть решено в том случае, если дополнительно задать соотношения между операторными токами и напряжениями на всех элементах цепи. На Z-элементах дерева это соотношение выглядит следующим образом

$$\left[ \begin{array}{c|c} Z_{t1} & \\ \hline \vdots & \\ \hline & Z_{tN_s} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A_{Zt1} \\ \vdots \\ A_{ZtN_s} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} U_{Zt1} \\ \vdots \\ U_{ZtN_s} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} (R_{t1} + B_{t1} \mathbf{H})i_{Zt01} + u_{CZ01} \\ \dots \\ (R_{tN_s} + B_{tN_s} \mathbf{H})i_{Zt0N_s} + u_{CZ0N_s} \end{array} \right]. \quad (27)$$

Далее необходимо задать соотношения между операторными токами и напряжениями на независимых и управляемых источниках напряжения и тока. Рассмотрим источники напряжения. Пусть некоторая ветвь содержит независимый источник нап-

ряжения  $e(t)$ , источник напряжения, управляемый током  $i_x$  ветви  $x$  с коэффициентом управления  $Z_x$ , и источник напряжения, управляемый производной тока  $di_y/dt$  ветви  $y$  с коэффициентом управления  $Q_y$ . Тогда напряжение ветви связано с токами соотношением

$$u_E(t) = e(t) + Z_x i_x(t) + Q_y di_y/dt. \quad (28)$$

Перейдя к изображениям, получим

$$U_E - Z_x V A_x - Q_y N A_y = e + Z_x i_{x0}. \quad (29)$$

Если цепь содержит несколько ветвей с источниками напряжения, то уравнение (29) можно записать в матричной форме

$$\begin{matrix}
 A_1 & \dots & A_x & \dots & A_y & \dots & U_{E1} & \dots & U_{Ex} & \dots & U_{Ey} & \dots & U_{EN_E}
 \end{matrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 \vdots \\
 \vdots \\
 -Z_x V \\
 \vdots \\
 -Q_y T \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 1
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \mathbf{X} =
 \begin{bmatrix}
 e_1 \\
 \vdots \\
 e_x - i_{x0} Z_x \\
 e_y \\
 \vdots \\
 e_{NE}
 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

В уравнении (30) в левой части показан фрагмент матрицы  $CV$ , содержащий коэффициент управления по току  $Z_x V$  управляющей ветви  $x$  и коэффициент управления  $Q_y T$  по производной тока управляющей ветви  $y$ . Над матрицей  $CV$  показаны переменные с ненулевыми коэффициентами. Объединив уравнения (26, 27, 30) в одну систему, получим матричное линейное алгебраическое уравнение

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица коэффициентов, а  $\mathbf{F}$  – вектор правых частей объединенной системы уравнений. Решение матричного уравнения (31) позволяет вычислить вектор  $\mathbf{X}$ , в котором интерес представляют полиномиальные коэффициенты. На больших интервалах изменения независимой переменной  $t \gg N h$  уравнение (31) нужно решать методом циклической прогонки, увеличивая текущее время на  $N$  шагов. Если для улучшения обусловленности матриц шаг интегрирования умножается на нормирующий коэффициент, то коэффициент управления по производной также следует умножить на нормирующий коэффициент.

Расчет по программе Colo-IDU переходного процесса модельной цепи (рис. 3) полностью совпадает с расчетом, выполненным по программе, составленной для уравнений (20).

**Выводы.**

1. Предложенная методика построения схем замещения электрической цепи позволяет непосредственно вычислять коэффициенты полиномиальной

аппроксимации искомых токов в переходных режимах, причем векторы полиномиальных коэффициентов удовлетворяют законам токов и напряжений Кирхгофа для схемы замещения и являются решениями системы алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

2. Предложенная схема замещения описывает не только саму электрическую цепь, но и численный метод расчета интегро-дифференциальных уравнений переходного процесса.

3. Для модельной задачи отмечено лучшее быстроедействие расчета по сравнению с известными численными методами.

**Список литературы / References**

1. Кеон Д. OrCAD Pspice. Анализ электрических цепей. / Кеон Дж. – СПб.: Питер, 2008. – 640 с.  
Keown John. (2008), *OrCAD Pspice. Analiz elektricheskikh tsepey* [OrCAD Pspice and Circuit Analysis], Piter, St. Petersburg, Russia.
2. Черных И.В. Simulink среда создания инженерных приложений. / Черных И.В – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 496 с.  
Chernyh, I.V. (2003), *Simulink sreda sozdania inzhenernykh prilozheniy* [Simulink Environment for Engineering Applications Creation], DIALOG-MIFI, Moscow, Russia.
3. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир. – 312 с.  
Hall, G. and Watt, J.M. *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equation*, Clarendon Press Oxford.
4. Shampine, L.F., Allen, R.C. and Pruess, S. (1997), *Fundamentals of numerical computing*, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, JOHN WILEY & SONS, INC.
5. Ильина В.А. Численные методы для физиков-теоретиков. I. / В.А. Ильина, П.К. Силаев // Институт компьютерных исследований. – Москва-Ижевск, 2003. – 132 с.  
Ilyina, V.A. and Silaev, P.K. (2003), *Chislennyye metody dlya fizikov-teoretikov* [Numerical Methods for Physicist-Theorists], Institut kompyuternykh issledovaniy, Moskow-Izhevsk, Russia.
6. Тиховод С.М. Система компьютерного моделирования динамических процессов в нелинейных магнитоэлектрических цепях / С.М. Тиховод // Технічна електродинаміка. – 2008. – № 3. – С. 16–23.  
Tikhovod, S.M. (2008), “System of computer modeling of dynamic processes in nonlinear magnetoelectric circuits”, *Tehnicheskaya yelektrodinamika*, no.3.
7. Сергада М.С. Математичне моделювання в електроенергетиці / Сергада М.С. – Львів: „Львівська політехніка“, 2002. – 300 с.  
Segeda, M.S. (2002), “Mathematic modeling in electrical power”, *Lvivska politekhnikha*, Lviv, Ukraine.

**Мета.** Розробка універсального програмного комплексу COLO-IDU для підвищення швидкодії розра-

хунку перехідних процесів у складних електричних колах.

**Методика.** Використано поліноміальну апроксимацію функції залежності розв'язку від часу та математичний апарат матричної алгебри. Інтегро-диференціальні рівняння динаміки електричних процесів записуються в матричній формі за допомогою поліноміального представлення функції розв'язку, похідної та інтегралу функції розв'язку в ряді дискретних крапок часу розрахунку.

**Результати.** Проведені розрахунки перехідних процесів у модельованому колі показали, що при однаковій досягнутій точності процесорний час розрахунку перехідного процесу запропонованим методом більше ніж у чотири рази менше, ніж при використанні багатокрокового методу Гіра. Виконане порівняння чисельного рішення з точним розв'язком, отриманим аналітично, підтверджує адекватність запропонованого методу й розробленого на його основі програмного комплексу.

**Наукова новизна.** Модифікація чисельного методу розрахунку інтегро-диференціальних рівнянь, відомого як ФДН (формули диференціювання назад), і розроблення на його основі схемної моделі числового методу розрахунку перехідних процесів в електричних колах. Схемна модель дозволяє перейти від електричного кола, в якому процеси описуються інтегро-диференціальними рівняннями, до заступної схеми із зображеннями струмів у вигляді векторів. Вектори-зображення містять коефіцієнти поліноміальної апроксимації залежностей струмів від часу. Показано, що для зображень струмів справедливі закони Кірхгофа, що приводять до алгебраїчних рівнянь.

**Практична значимість.** Розроблений метод відкриває можливість використання всього багатообразного апарату теорії кіл для роботи із зображеннями струмів, на підставі чого розроблений універсальний програмний комплекс COLO-IDU для розрахунку перехідних процесів у складних електричних колах.

**Ключові слова:** *перехідний процес, числові методи, схемна модель, поліноміальна апроксимація*

**Purpose.** To develop the universal software Colo-IDU in order to increase the speed of calculation of transients in complex electric circuits.

**Methodology.** We have used the polynomial approximation of the solution time function and mathematical apparatus of matrix algebra. Integro-differential dynamical equations of electric processes have been formulated in matrix form with the help of polynomial notion of solution function, derivative and integral of solution function in the series of the discrete marks of calculation.

**Results.** The calculations of transients in the modeled circuit have demonstrated that calculation of a transient by means of the offered method takes four times less processing time than Gear's multi-step calculation but the accuracy is the same. The comparison of the numerical calculation with the precise calculation obtained analytically confirms adequacy of the proposed method and the software developed on its base.

**Originality.** We have modified the numerical computation of the integro-differential equations which is known as BDF (back derivation formulas) and developed the circuit model of numerical calculation of transient in electric circuits on its base. The circuit model allows us to switch from electric circuit, where the processes are described by means of integro-differential equations, to the equivalent circuit with the current displayed as vectors. The vectors images contain coefficients of polynomial approximation of current depending on time. We have shown that Kirchoff's rules are valid for the images of current and result into algebraic equations.

**Practical value.** The developed method provides the possibility to use the entire circuit theory machinery for the images of current. Based on this the universal software package Colo-IDU for the transient analysis in the complex electric circuits has been designed.

**Keywords:** *transient, numerical calculation, circuit model, polynomial approximation*

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук  
О.В. Волковим. Дата надходження рукопису  
05.03.13.*