

# ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНІ КОМПЛЕКСИ ТА СИСТЕМИ

УДК 62-503.5

А.С. Бешта<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф.,  
член-кор. акад. наук України,  
М.Ю. Кузьменко<sup>2</sup>, О.А. Бойко<sup>1</sup>, А.С. Соколова<sup>1</sup>

1 – Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г.Днепропетровск, Украина, e-mail: boykooo@yandex.ru  
2 – „Национальная металлургическая академия Украины“, г.Днепропетровск, Украина

## ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСКРОЙ ДЛИННОМЕРНОГО ПРОКАТА НА ПРОКАТ ТОВАРНОЙ ДЛИНЫ

A.S. Beshta<sup>1</sup>, Corresponding Member of the National  
Academy of Science of Ukraine, Dr. Sci. (Tech.),  
Professor,  
M.Yu. Kuzmenko<sup>2</sup>, O.O. Boyko<sup>1</sup>, A.S. Sokolova<sup>1</sup>

1 – State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: boykooo@yandex.ru  
2 – The National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnepropetrovsk, Ukraine

## OPTIMAL DEVIDING OF LONG PRODUCTS INTO ROLLED PRODUCTS OF MARKETABLE LENGTH

**Цель.** Нахождение закономерностей, обеспечивающих оптимальный выход товарной продукции, раскрой длинномерного проката на различных технологических стадиях производства проката в стержнях.

**Методика.** Методика решения задачи оптимального раскроя основывается на комбинаторном анализе возможных вариантов формирования раскройных планов для порезки длинномерного проката и сопоставления их по критерию максимального выхода товарного проката заказной (заданной) длины и максимальной стоимости товарного проката. На первом этапе рассматривался детерминированный случай – с известной координатой торца длинномерного проката, а на втором – случай, когда положение торца длинномерного проката описывалось вероятностными характеристиками.

**Результаты.** Показали, что при оптимизации по критерию максимального выхода товарного проката заказной (заданной) длины решение задачи выбора раскройного плана нетривиальное только для случая, когда положение торца длинномерного проката описывалось вероятностными характеристиками, и заключается в выборе координаты первого реза. При оптимизации по критерию максимальной стоимости товарного проката решение либо совпадает с решением задачи оптимизации по критерию максимального выхода товарного проката заказной (заданной) длины, либо является сочетанием раскроя одной части длинномерного проката на заказные длины, а другой – на равные отрезки товарной длины.

**Научная новизна.** Заключается в установлении общих закономерностей, обеспечивающих оптимальный раскрой длинномерного проката на различных стадиях производства стержневого проката.

**Практическая значимость.** Заключается в том, что организация управления процессами раскроя длинномерного проката по полученным зависимостям позволяет уменьшить потери металла на обрезь и увеличить выход товарной продукции.

**Ключевые слова:** *длинномерный прокат, товарный прокат, раскрой, критерии, оптимизация*

**Постановка проблемы в общем виде.** Основной объем товарного проката, производимого в Украине, приходится на сортовой прокат, поставляемый в стержнях. В процессе его производства одной из наиболее используемых операций является операции раскроя длинномерного проката на прокат то-

варной длины. К таким операциям относятся: операции раскроя длинномерного проката на выходе заготовочного стана либо длинномерного слитка на выходе установки непрерывной разливки заготовки на заготовки товарной длины; операции раскроя длинномерного проката за линией клетей сортопрокатного стана на прутки проката для их последующей

укладки на холодильник; раскрой прутков проката на стержни товарной длины за холодильником.

В процессе раскроя длинномерного проката, как правило, образуются укороченные отрезки – обрезь, которые направляются на переплавку. Величина обрезки может достигать 10% и более массы исходного длинномерного проката. Поэтому минимизация обрезки является актуальной практической задачей.

Кроме прямых энергопотерь, связанных с образованием обрезки при раскрое проката, существуют экономические потери, связанные с дифференциацией цен на товарный прокат в зависимости от соответствия его длины длине, оговоренной заказом.

Следовательно, задача раскроя длинномерного проката является многокритериальной. Более того, как следует из работ [1, 2], локальные задачи раскроя в технологической цепочке производства сортового проката в стержнях являются взаимосвязанными.

Несмотря на наличие теоретических разработок по многокритериальной оптимизации [3–5], примеры их применения на практике достаточно ограничены и, во многом, ограничены на уровне концептуальных подходов [6].

Поэтому, решение задачи определения оптимального раскройного плана для длинномерного проката представляет как практический, так и научный интерес.

#### Анализ последних достижений и публикаций.

Проблема оптимального раскроя длинномерного проката тесно связана с практической проблемой увеличения выхода мерного проката на мелкосортных станах. Наиболее всесторонне данная проблема была рассмотрена в работе [1], в которой нашли свое отражение результаты предыдущих исследований по данной проблеме, и была показана взаимосвязь и влияние стратегий управлений операциями производства на выход мерной продукции. Однако вопросы формирования стратегий управления отдельных операций с учетом их взаимосвязи остались не рассмотренными.

В работе [7] были сопоставлены результаты построений раскройных планов для пакета прутков на основе априорной и апостериорной информации о длинах прутков в пакете на выход мерной продукции. Из проведенных исследований следует, что построение раскройных планов для пакета прутков по известным правилам, но с учетом информации о фактических длинах прутков в пакете, позволяет увеличить выход мерного товарного проката.

Дальнейшее развитие вопросы формирования раскройного плана длинномерного проката на выходе прокатной линии клетей мелкосортного стана получили в [8]. Впервые в работе задача раскроя длинномерного проката рассматривалась как многокритериальная задача оптимизации. Тем не менее, полученные результаты носят достаточно частный характер.

Вопросы раскроя проката на крупносортных заготовочных станах отражены в работе [9]. Однако, в

работе не рассмотрены вопросы оптимизации раскройных планов с учетом их влияния на выход мерного проката при дальнейшем использовании заготовок на мелкосортных станах для производства стержней проката определенного профилаэразмера.

Таким образом, проведенными ранее исследованиями не были вскрыты общие закономерности построения планов раскроя длинномерного проката по сформулированным выше критериям. Не рассмотрена также взаимосвязь и различие оптимальных, в смысле этих критериев, раскройных планов.

**Постановка задачи исследования.** В общем случае, при раскрое длинномерного проката длиной  $l_{\text{дм}}$  имеют место две основные задачи.

Первая – получить максимальную длину отрезков заданной (заданных) длины

$$\Phi = \sum_1^{n_{\text{отр}_3}} l_{3(i)} \Rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $n_{\text{отр}_3}$  – количество отрезков заданной длины;  $l_{3(i)}$  – длина  $i$ -го отрезка из множества отрезков заданной длины (длин).

Вторая – стоимость отрезков, полученных в результате раскроя длинномерного проката, должна быть максимальна

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N_{\text{отр}}} C_i \cdot l_i \Rightarrow \max, \quad (2)$$

где  $N_{\text{отр}}$  – общее количество отрезков, полученных после порезки длинномерного проката;  $l_i$  – длина  $i$ -го отрезка;  $C_i$  – удельная стоимость отрезка длиной  $l_i$ .

Рассмотрим требования к отрезкам, на которые делиться длинномерный прокат.

Прежде всего, для каждой операции раскроя существует множество товарных (годных к реализации либо к дальнейшей переработке для получения товарной продукции) длин отрезков –  $L_T$ . Отрезок длиной  $l_{\text{отр}}$  является товарным, т.е.  $l_{\text{отр}} \in L_T$  если выполняется условие

$$l_{T_{\text{min}}} \leq l_{\text{отр}} \leq l_{T_{\text{max}}}, \quad (3)$$

где  $l_{T_{\text{min}}} \equiv \inf \{L_T\}$ ;  $l_{T_{\text{max}}} \equiv \sup \{L_T\}$ .

Ряд операций раскроя, таких как раскрой длинномерного проката (прокатной штанги) на заготовки, длинномерного проката (прутков) на стержни, допускает образование как отрезков товарной длины, так и коротких отрезков длиной  $l_{\text{отр}_к}$ , обрезки, так что

$$l_{\text{отр}_к} < l_{T_{\text{min}}}. \quad (4)$$

Обрезь не подлежит дальнейшей переработке и направляется на переплавку.

Такая операция как раскрой длинномерного проката на выходе прокатной линии мелкосортного стана на прутки не допускает, по условиям приема, прутков на холодильник.

Для проката, поставляемого в стержнях (сюда относится мелкосортный и среднесортный прокат), задается мерная длина стержней, т.е. заданная длина отрезка –  $l_3$ , которая имеет единственное значение, определяемое условиями заказа. Товарный прокат, содержащий стержни разной длины, принадлежащих множеству  $L_T$  для стержней (немерный прокат), реализуется по цене, которая меньше, чем мерный прокат – стержни заданной длины, но, разумеется, больше стоимости коротких отрезков

$$C_3 > C_T > C_K, \quad (5)$$

где  $C_3$ ,  $C_T$ ,  $C_K$  – удельные стоимости отрезков заданной, товарной длины и коротких отрезков соответственно.

Разумеется, удельная стоимость коротких стержней –  $C_K$ , меньше стоимости стержней товарной длины.

Для прутков, которые, по сути, являются промежуточным продуктом при производстве товарного проката в стержнях [1], удельная стоимость может быть оценена по стоимости товарной продукции, получаемой из данного прутка при последующем его раскросе на стержни. При производстве стержней выход мерной продукции из прутка определяется его кратностью мерной длине, а выход немерного проката и/или обрезки – остатком после отделения от прутка стержней мерной длины. Анализ зависимости относительного выхода мерной продукции от длины прутка и заготовки показал, что она имеет четко выраженные локальные максимумы, отстоящие друг от друга на одинаковых расстояниях [1, 2]. Именно эти значения аргумента будем принимать как заданные при раскросе длинномерного проката на прутки.

Таким образом, в данном случае заданные длины отрезков –  $l_3$ , составляют подмножество  $L_3$  множества  $L_T$ , которое описывается следующим образом

$$l_3 = l_{3\_min} + \Delta l_3 \cdot k_3, \quad k_3 = 0, \dots, k_{3\_max}, \quad (6)$$

где  $l_{3\_min}$  – минимальная длина прутка, удовлетворяющая неравенству (3), при раскросе которого имеет место локальный максимум относительного выхода стержней мерной длины;  $\Delta l_3$  – шаг, расстояние между максимумами;  $k_3$  – порядковый номер максимума из натурального ряда чисел от нуля до максимального значения  $k_{3\_max}$ , при котором выполняется неравенство (3).

При производстве заготовок дифференциация отрезков и их удельной стоимости в зависимости от длины определяется условиями дальнейшей переработки заготовок.

Если предполагается использование заготовок на данном предприятии, то для заготовок, для производства стержневого проката определенного профилеразмера, в силу тех же причин, что и при производстве прутков, имеем множество  $L_T$ , которое определяется нестрогим неравенством (3), и множество  $L_3$ , которое определяется неравенствами (3) и (6). Однако, в отличие от прутков, при производстве заготовок допустимо коротких отрезков (обрези), множество возможных длин которых –  $L_{отр\_к}$ , определяется неравенством (4). Для заготовок, производимых не под конкретный заказ (профилеразмер) или для производства проката в мотках, в результате раскроя длинномерного проката формируются отрезки, которые могут быть отнесены только к одному из двух множеств –  $L_T$  или  $L_{отр\_к}$ .

При производстве заготовок как конечной товарной продукции для предприятия-производителя возможна поставка стержней, длина которых оговорена заказом и удовлетворяет стандартам.

Кроме критериев и условий, характеризующих требования к результатам решения оптимизационной задачи (задач), существуют некоторые различия в исходных данных, используемых для ее решения. Так, практически во всех случаях известна длина длинномерного проката, подлежащего раскросу –  $l_{дм}$ , а координата переднего торца длинномерного проката всегда известна перед началом раскроя в двух случаях: при раскросе длинномерного проката на заготовки, при раскросе длинномерного проката на прутки.

При раскросе длинномерного проката (прутка) на стержни нам известны лишь вероятностные характеристики положения переднего торца проката [10]. Однако, при порезке длинномерного проката на стержни задана одна фиксированная заказная длина проката (мера) из возможного диапазона товарных длин от шести до двенадцати метров включительно, что оговорено стандартом, т.е. для данного случая имеем

$$l_{T\_max} / l_{T\_min} = 2. \quad (7)$$

Систематизируя варианты раскроя длинномерного проката на отрезки, можно выделить следующие базовые варианты задачи оптимального раскроя:

1. Известна длина длинномерного проката  $l_{дм}$  и координата его переднего торца.

Заданы длины отрезков в виде ряда (6), товарной длины в виде ограничения (3), коротких отрезков в виде ограничения (4), их удельные стоимости удовлетворяют неравенству (5).

Требуется определить оптимальные, в смысле критериев (1) и (2), планы раскроя длинномерного проката.

Частными случаями данного варианта задачи являются:

а) в (6)  $k_{3\_max} = 0$ ;

б) заданы только товарные длины отрезков в виде ограничения (4);

в) при раскрое не допускается образование коротких отрезков.

2. Известны длина длинномерного проката  $l_{dm}$ , математическое ожидание (М.О.) и среднеквадратичное отклонение (С.К.О.) нормального закона распределения координаты его переднего торца.

Заданы длины отрезков в виде ряда (6) при  $k_{3\_max} = 0$  ( $l_3 = l_{3\_min}$ ), товарной длины в виде ограничения (3) и (7), коротких отрезков в виде ограничения (4), их удельные стоимости удовлетворяют неравенству (5).

Требуется определить оптимальные, в смысле критериев (1) и (2), планы раскроя длинномерного проката.

**Основной материал исследований.** Наиболее простое, тривиальное решение первого варианта оптимизационной задачи имеет место для подварианта  $I, a$  при оптимизации по критерию (1).

От длинномерного проката последовательно, начиная с переднего торца, отделяются отрезки длиной  $l_3$ : первый рез производится на расстоянии  $l_3$  от переднего торца, а координата каждого последующего реза отстоит от координаты предыдущего реза также на длину  $l_3$ . В результате образуется  $n_{отр\_3}$  отрезка длиной  $l_3$ . Максимальное количество отрезков длиной  $l_3$  –  $n_{отр\_3\_max}$ , на которое можно поделить прокат, равно

$$n_{отр\_3\_max} = \left[ \frac{l_{dm}}{l_3} \right]. \quad (8)$$

Здесь  $[ ]$  – операция округления до меньшего целого.

Очевидно, что в результате раскроя длинномерного проката по критерию (1) образуется  $n_{отр\_3\_max}$  отрезков длиной  $l_3$  и один отрезок-остаток длиной  $l_{ост}$

$$l_{ост} = l_{dm} - n_{отр\_3\_max} \cdot l_3, \quad (9)$$

которые образуют множество длин стержней, оптимальное в смысле критерия (1) –  $L_\Phi$ .

Задачу оптимизации порезки длинномерного проката по критерию (2) можно сформулировать следующим образом: *определить, на сколько отрезков следует поделить длинномерный прокат и какой длины должен быть каждый отрезок, чтобы их суммарная стоимость была максимальна.*

Каждому варианту порезки, описываемой множеством координат резов, соответствует свое множество длин отрезков  $L$ , на которые делится (раскраивается) длинномерный прокат. Причем, для любого такого множества  $L$  справедливо

$$\sum_{\forall l_{dm} \in L} l_{отр} = l_{dm}. \quad (10)$$

Два варианта порезки, описываемых множествами координат резов  $R_i$  и  $R_j$ , будем считать равнозначными, если каждому из них соответствуют эквивалентные множества длин отрезков

$$L_i \equiv L_j,$$

т.к. именно множество  $L$  определяет эквивалентную стоимость длинномерного проката при конкретном варианте его раскроя.

Наша задача – определить такое множество  $L_\Psi$ , при котором имеет место

$$\Psi(L_\Psi) \Rightarrow \max.$$

В общем случае таких множеств может быть бесконечное количество, т.к., если  $L_\Psi$  содержит элемент, соответствующий короткому отрезку, то, поскольку последний может быть поделен на бесконечное число коротких отрезков, всегда найдется бесконечное число множеств, отличных от исходного множества лишь количеством и величинами элементов, соответствующих коротким отрезкам, имеющих ту же суммарную относительную стоимость.

Для исключения неоднозначности решения введем дополнительное условие оптимизации: *из двух оптимальных множеств  $L_{\Psi_i}$  и  $L_{\Psi_j}$ , для которых имеет место равенство*

$$\Psi(L_{\Psi_i}) = \Psi(L_{\Psi_j}),$$

*будем считать оптимальным то множество, которое имеет меньшее количество элементов.*

Перейдем к решению задачи оптимизации раскроя одного прутка, предварительно доказав две леммы.

Прежде всего, докажем, что в результате оптимального раскроя образуется не более одного короткого отрезка. Справедливость данного утверждения следует из характера функции удельной стоимости и того, что двум коротким отрезкам длиной  $l_{отр\_к(i)}$  и  $l_{отр\_к(j)}$  может быть поставлен в соответствие либо один отрезок длиной  $l_{отр\_к\Sigma(i,j)} = l_{отр\_к(i)} + l_{отр\_к(j)}$  с удельной стоимостью  $C_k$ , если  $l_{отр\_к\Sigma(i,j)} < l_{T\_min}$ , или

с удельной стоимостью не менее  $C_t$ , если  $l_{t\_min} \leq l_{отр\_к \Sigma(i,j)} \leq l_{t\_max}$ , либо, при  $l_{отр\_к \Sigma(i,j)} > l_{t\_max}$ , два отрезка – один товарной длины, например  $l_{t\_max}$ , а второй отрезок короткий, длиной  $l_{отр\_к} = l_{отр\_к \Sigma(i,j)} - l_{t\_max}$ . Очевидно, что во всех случаях суммарная стоимость двух исходных коротких отрезков будет не больше, чем отрезка, полученного в результате их объединения, либо двух отрезков, один из которых будет товарной длины.

Следовательно, с любым множеством  $L'$ , включающим хотя бы два стержня (элемента) с длиной менее  $l_{t\_min}$  каждый, может быть сопоставлено множество  $L''$ , отличающееся только тем, что вместо данных двух элементов присутствует либо один элемент – стержень с длиной, равной сумме длин исходных стержней, и в этом случае множество  $L''$  является предпочтительней в силу дополнительного условия оптимизации, либо два элемента, один из которых больше или равен  $l_{t\_min}$ , что также делает предпочтительнее множество  $L''$ , т.к.  $\Psi(L'') > \Psi(L')$ .

Отсюда следует, что, если при оптимизации раскроя длинномерного проката по критерию (1) образуется в остатке отрезок такой длины  $l_{ост}$  (8), что

$$l_{ост} \geq l_{t\_min}, \quad (11)$$

то данное множество стержней будет оптимально и в смысле критерия (2).

Рассмотрим случай, когда условие (11) не выполняется.

В этом случае оптимальным является один из двух вариантов: это либо множество отрезков, сформированное в соответствии с (8, 9), либо множество отрезков, содержащих максимальное количество отрезков заказной длины, но не содержащих ни одного короткого отрезка.

Рассмотрим правило формирования отрезков товарной длины из части длинномерного проката. Легко показать (здесь не приводится ввиду тривиальной простоты доказательства), что, если часть длинномерного проката длиной  $l_{дм\_ч}$  надо поделить на  $N_{отр}$  отрезков так, чтобы полученное множество длин отрезков –  $L_{дм\_ч} (\{ l_{отр(i)} \ i = 1 \dots N_{отр} \} \in L_{дм\_ч})$ , удовлетворяло условиям  $\inf \{ L_{дм\_ч} \} \Rightarrow \max$ ,  $\sup \{ L_{дм\_ч} \} \Rightarrow \min$ , то отрезок должен быть поделен на равные части, т.е.

$$l_{отр(1)} = \dots = l_{отр(i)} = \dots = l_{отр(N_{отр})} = \frac{l_{дм\_ч}}{N_{отр}}.$$

Поэтому, если обеспечивается условие

$$\left[ \frac{l_{дм\_ч}}{l_{t\_min}} \right] \geq \left[ \frac{l_{дм\_ч}}{l_{t\_max}} \right], \quad (12)$$

где  $\lceil \cdot \rceil$  – округление до большего целого, то часть длинномерного проката длиной  $l_{дм\_ч}$  может быть поделена на отрезки товарной длины. Учитывая дополнительное условие оптимизации, количество отрезков –  $n_{отр\_т}$  и длину отрезков (все отрезки имеют равную длину) товарной длины –  $l_{отр\_т}$ , определим как

$$n_{отр\_т} = \left[ \frac{l_{дм\_ч}}{l_{t\_max}} \right]; \quad (13)$$

$$l_{отр\_т} = \frac{l_{дм\_ч}}{n_{отр\_т}}. \quad (14)$$

Тогда, для определения оптимального, в смысле критерия (2), раскройного плана в качестве альтернативы варианту, оптимальному в смысле критерия (1), следует противопоставить такой раскройный план, при котором прокат условно делится на две части. Первый участок кратный заказной длине отрезка –  $l_{дм\_ч\_з}$ , т.е. делиться на  $l_3$  без остатка, а вторая часть может быть поделена на отрезки товарной длины без остатка –  $l_{дм\_ч\_т}$ , при этом длина первой части должна быть максимально возможной

$$l_{дм\_ч\_з} \Rightarrow \max.$$

Алгоритм определения альтернативного раскройного плана в данном случае очевиден.

Если не выполняется условие (11), то последовательно задавая количество отрезков заказной длины –  $n_{отр\_з}$ , от  $(n_{отр\_з\_max} - 1)$  до 0, проверяем, делиться ли оставшаяся часть

$$l_{дм\_ч} = l_{дм\_ч} - n_{отр\_з} \cdot l_3$$

на отрезки товарной длины, т.е. выполняется ли условие (12). Если да, то определяем длину и количество отрезков товарной, но не заказной, длины в соответствии с (13, 14).

Полученное множество отрезков заказной и товарной длин является альтернативным множеством  $L_A$  для определения оптимального, в смысле критерия (2), раскройного плана.

Окончательно определяем  $L_\Psi$  из двух множеств –  $L_\Phi$  и  $L_A$ , рассчитывая и сопоставляя значения критерия  $\Psi$  для данных множеств в соответствии с (2).

Решение первого варианта оптимизационной задачи для подварианта  $I, б$  при оптимизации по критерию (1) не имеет смысла, а по критерию (2) имеет место всегда, если выполняется условие (12) при  $l_{дм,ч} = l_{дм}$  и определяется по (13,14).

Если условие (12) не выполняется, например,  $l_{т,мин} = l_{т,макс}$ , тогда

$$\left[ \frac{l_{дм,ч}}{l_{т,мин}} \right] = \left[ \frac{l_{дм,ч}}{l_{т,макс}} \right] - 1,$$

оптимальный раскрой предполагает раскрой длинномерного проката на  $n_{отр,т}$  отрезков длиной  $l_{т,макс}$  и один короткий отрезок длиной

$$l_{отр,к} = l_{дм} - n_{отр,т} \cdot l_{т,макс}.$$

Рассмотрим теперь возможное численное решение задачи по варианту  $I$  в наиболее общем виде.

Представим каждый из отрезков заказной длины, соответствующий (6), как объединение субмножеств суботрезков, в которое входит один суботрезок длиной  $l_{3,мин}$  и  $k_3$  отрезка длиной  $\Delta l_3$ , причем  $0 \leq k_3 \leq k_{3,макс}$ .

В этом случае, раскрой длинномерного проката на заказные длины можно представить как раскрой его на множество суботрезков соответствующей длины с последующим выделением из этого множества субмножества по сформулированным выше правилам с последующим объединением данных подмножеств в отрезки заказной длины.

В свою очередь, из множества суботрезков могут быть выделены подмножество суботрезков длиной  $l_{3,мин} - L_{3,мин}$  и подмножество суботрезков длиной  $\Delta l_3 - L_\Delta$ , причем количество элементов последнего подмножества должно отвечать неравенству

$$0 \leq n_\Delta \leq n_{3,мин} \cdot k_{3,макс},$$

где  $n_{3,мин}$  – число элементов подмножества  $L_{3,мин}$ ;  $n_\Delta$  – число элементов подмножества  $L_\Delta$ .

Тогда задачу оптимального раскрой по варианту  $I$  и критерию (1) можно решать в два этапа: на первом этапе определим число элементов подмножеств  $L_{3,мин}$  и  $L_\Delta$ , при котором имеет место максимум критерия (1), а на втором этапе распределим и объединим суботрезки в отрезки заданной длины.

Максимально –  $n_{3,мин,макс}$ , и минимально –  $n_{3,мин,мин}$ , возможное число элементов подмножества  $L_{3,мин}$ , при длине длинномерного проката  $l_{дм}$ , определим как

$$n_{3,мин,макс} = \left[ \frac{l_{дм}}{l_{3,мин}} \right];$$

$$n_{3,мин,мин} = \left[ \frac{l_{дм}}{l_{3,мин} + k_{3,макс} \cdot \Delta l_3} \right].$$

При фиксированном числе элементов подмножества  $L_{3,мин} - n_{3,мин}$ , для максимума критерия (1), необходимо, чтобы подмножество  $L_\Delta$  содержало  $n_\Delta$ , которое определим как

$$n_\Delta = \left[ \frac{l_{дм} - n_{3,мин} \cdot l_{3,мин}}{\Delta l_3} \right].$$

В этом случае длина отрезка-остатка определяется как

$$l_{ост} = l_{дм} - n_{3,мин} \cdot l_{3,мин} - n_\Delta \cdot \Delta l_3.$$

Очевидно, что из двух возможных пар подмножеств  $L_{3,мин(i)}, L_\Delta(i)$  и  $L_{3,мин(j)}, L_\Delta(j)$  предпочтительнее, в смысле критерия (1), будет то множество, значение остатка для которого будет меньше.

Отсюда следует алгоритм определения оптимальных, в смысле критерия (1), подмножеств  $L_{3,мин}$  и  $L_\Delta$ . Задаваясь  $n_{3,мин}$  от  $n_{3,мин,мин}$  до  $n_{3,мин,макс}$  через единицу, определяем для соответствующей пары подмножеств длину отрезка-остатка  $l_{ост}$  и, в качестве оптимальной пары, оставляем ту, для которой длина отрезка-остатка меньше. В случае, когда длины отрезков-остатков совпадают, то, в силу дополнительного условия оптимизации, в качестве оптимальной пары оставляем ту, у которой множество  $L_{3,мин}$  содержит меньшее число элементов – для которого  $n_{3,мин}$  меньше.

На втором этапе оптимизации определяем множество длин отрезков заказной длины, исходя из того соображения, что, с технологической точки зрения, наиболее рациональным является равномерный раскрой [1]. В этом случае длины отрезков заказной длины должны отличаться не более, чем на  $\Delta l_3$ . В результате имеем отрезки заказной длины двух модификаций. Для определения длины отрезков первой модификации в (6) в качестве  $k_3$  подставляем  $k_{3,1}$

$$k_{3,1} = \left[ \frac{n_{\Delta}}{n_{3,\min}} \right],$$

а для второй –  $k_{3,2}$

$$k_{3,2} = k_{3,1} + 1.$$

Количество отрезков первой –  $n_{\text{отр}_{3,1}}$ , и второй –  $n_{\text{отр}_{3,2}}$ , модификаций соответственно равны

$$n_{\text{отр}_{3,1}} = n_{3,\min} \cdot k_{3,2} - n_{\Delta};$$

$$n_{\text{отр}_{3,2}} = n_{\Delta} - n_{3,\min} \cdot k_{3,1}.$$

Решение задачи оптимального раскроя по варианту **1** и критерию (2) достаточно очевидно и вытекает из решения задачи оптимального раскроя по критерию (1) и, в частном случае, из решения задачи **1, а** оптимального раскроя по критерию (2).

Если отрезок-остаток является коротким отрезком, то, если  $k_{3,1} < k_{3,\max}$ , достаточно один из отрезков первой модификации объединить с отрезком-остатком. Поскольку  $l_{\text{ост}} < \Delta l_3$ , то длина такого отрезка будет удовлетворять условию (3), т.е. являться отрезком товарной длины. В результате получим альтернативное множество отрезков  $L_A$ , а оптимальное множество  $L_{\Psi}$  определим из двух множеств  $L_{\Phi}$  и  $L_A$ .

Если  $k_{3,1} = k_{3,\max}$ , то возможны следующие случаи. При  $l_{3,\min} + \Delta l_3 \cdot k_{3,\max} + l_{\text{ост}} \leq l_{T,\max}$  альтернативное множество формируется так, как было рассмотрено выше. В противном случае формируются два альтернативных множества: одно по правилам формирования альтернативного множества, приведенным выше при решении задачи **1, а**; второе – при выборе оптимального множества по критерию (1) определяем субоптимальное множество, накладывая дополнительное условие  $k_{3,1} < k_{3,\max}$ .

При решении задачи по варианту **1** принимается, что координаты резов отсчитывались от переднего торца длинномерного проката.

При втором варианте задачи – при раскрое длинномерного проката в пакете, когда перед началом раскроя координаты (положение) его торца являются случайной величиной с нормальным законом распределения, близким к нормальному, нормальным и известным математическим ожиданием, и дисперсией [10], имеют место следующие особенности.

Перед решением данной задачи рассмотрим, каким образом, принятые в данной задаче дополнительные условия, влияют на решение оптимизационной задачи по первому варианту, т.е. предположим, что нам известна координата переднего торца проката.

Тогда решение задачи **2** является решением подзадачи **1, а** с дополнительным условием (7). Однако, в силу условия (7), у нас всегда в случае, когда  $l_{\text{ост}} < l_{T,\min}$ , то при выполнении данного условия всегда  $l_{T,\min} < l_{\text{ост}} + l_3 < 2 \cdot l_{T,\max}$ , и альтернативным раскройным планом при оптимизации по критерию (2) будет раскройный план, содержащий на один стержень заданной длины меньше и один или два стержня товарной длины. Следовательно, для задачи **1, а** с условием (7), оптимальный план раскроя фактически сводится к определению координаты последнего реза прутка, а все предыдущие резы, начиная со второго включительно, отстоят друг от друга на расстоянии заданной длины отрезка, а для варианта задачи **2** – первого реза относительно координаты М.О. переднего торца длинномерного проката и последнего реза относительно координаты предпоследнего реза (или пропуска последнего реза).

Рассмотрим решение задачи оптимизации по критерию (1) варианта **2**.

Поскольку невозможно гарантировать осуществление первого реза длинномерного проката на расстоянии заданной длины от его переднего торца, то образуется передний и задний остаток длиной  $l_{\text{ост}_\Pi}$  и  $l_{\text{ост}_3}$  соответственно. Если суммарная длина переднего и заднего остатка  $l_{\text{ост}_\Sigma}$  превышает заданную длину

$$l_{\text{ост}_\Sigma} = l_{\text{ост}_\Pi} + l_{\text{ост}_3} \geq l_3, \quad (15)$$

то такой раскрой не может считаться оптимальным как по критерию (1), так и по критерию (2).

Неравенство (15) всегда имеет место при  $l_{\text{ост}_\Pi} > l_3$ , из чего следует, что координата первого реза длинномерного проката должна лежать на таком расстоянии  $l$  от его переднего торца, что

$$0 < l \leq l_3,$$

а задача оптимального раскроя прутка по критериям (1) и (2) предполагает, в первую очередь, определение координаты первого реза, исходя из максимальной вероятности  $\tilde{P}()$  выхода максимального количества отрезков заданной длины

$$\tilde{P}(n_{\text{отр}_3} = n_{\text{отр}_{3,\max}}) \Rightarrow \max, \quad (16)$$

что является необходимым и достаточным условием оптимальности раскройного плана по критерию (1). Здесь  $n_{\text{отр}_{3,\max}}$  вычисляется по (8).

Оптимизация по критерию (2) требует, чтобы, в случае существования множества решений оптимизационной задачи по критерию (1), из последних были выбраны такие решения, при которых вероятност-

ная стоимость переднего и заднего остатков была бы максимальной

$$\tilde{P}\left((C_{\text{ост}_\Pi} \cdot l_{\text{ост}_\Pi} + C_{\text{ост}_3} \cdot l_{\text{ост}_3}) \Rightarrow \max\right) \Rightarrow \max .$$

Рассмотрим задачу стохастической оптимизации раскроя длинномерного проката длиной  $l_{\text{дм}}$  по критерию (1), для которого известны М.О. и С.К.О. координаты его переднего торца  $x_{\text{тп}}$  при нормальном законе распределения данной случайной величины.

Относительно длины переднего и заднего остатка критерий (16), с учетом неравенства (15), может быть записан как

$$\tilde{P}(l_{\text{ост}_\Sigma} < l_3) \Rightarrow \max .$$

Заметим, что координаты заднего –  $x_{\text{дф}}$ , и переднего торцов проката жестко связаны

$$x_{\text{тз}} = l_{\text{дм}} + x_{\text{тп}} .$$

Решение данной оптимизационной задачи дает оптимальную координату первого реза –  $r_1^{(\text{опт})}$

$$r_1^{(\text{опт})} = M[x_{\text{тп}}] + \frac{1}{2} \cdot l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})} , \quad (17)$$

где  $M[x_{\text{тп}}]$  – М.О. координаты переднего торца длинномерного проката;  $l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})}$  – оптимальная величина оптимального остатка

$$l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})} = l_{\text{дм}} - \left[ \frac{l_{\text{дм}}}{l_3} \right] \cdot l_3 .$$

Вероятность оптимального раскроя длинномерного проката при выборе оптимальной координаты первого реза, в зависимости от величины суммарного остатка, может быть рассчитана через табулированную функцию Лапласа  $\tilde{F}()$  по формуле

$$\tilde{P}(l_{\text{ост}_\Sigma} < l_3) \Big|_{r_1=r_1^{(\text{опт})}} = 2 \cdot \tilde{F}\left(\frac{l_{\text{ост}_\Sigma}}{2 \cdot \sigma[x_{\text{тп}}]}\right) ,$$

где  $\sigma[x_{\text{тп}}]$  – С.К.О. координаты переднего торца длинномерного проката, т.е. не зависит от заказной длины отрезка, а является функцией отношения суммарного остатка к С.К.О. координаты торца.

Следующий этап оптимизации раскроя длинномерного проката – оптимизация по критерию (2), имеет место, если существует оптимальная, в смысле критерия (1), область координат первого реза. Из (17)

следует, что теоретически такая область отсутствует. В то же время имеет смысл выделить область квази-оптимальных координат первого реза, для точек которой выполняется условие

$$\tilde{P}(n_{\text{отр}_3} = n_{\text{отр}_3 \text{ макс}}) \geq \tilde{P}_{\text{дв}} ,$$

где  $\tilde{P}_{\text{дв}}$  – доверительная вероятность отсутствия в пачке немерных, укороченных и коротких отрезков. Как правило, ее принимают равной 0,95 (распространенная в стандартах требуемая степень достоверности), либо 0,99865 (правило трех сигм).

Очевидно, что, для существования данной оптимизационной задачи, оптимальный остаток должен иметь величину в пределах

$$\hat{p}_{\text{дв}} \cdot \sigma[x_{\text{тп}}] \leq l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})} \leq l_3 ,$$

где  $\hat{p}_{\text{дв}}$  – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью ( $\hat{p}_{\text{дв}} = 3,94$  при  $\tilde{P}_{\text{дв}} = 0,95$ ,  $\hat{p}_{\text{дв}} = 6$  при  $\tilde{P}_{\text{дв}} = 0,99865$ ).

Решение оптимизационной задачи по критерию (2) дает следующие зависимости для определения координаты первого реза:

- при  $l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})} < 2 \cdot l_{\text{т мин}}$

$$r_1^{(\text{опт})} = M[x_{\text{тп}}] + \frac{1}{2} \cdot \hat{p}_{\text{дв}} \cdot \sigma[x_{\text{тп}}] ; \quad (19)$$

- (17) при  $l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})} \geq 2 \cdot l_{\text{т мин}}$ .

Однако, учитывая то, что  $2 \cdot l_{\text{т мин}} \geq l_3$ , координата первого реза должна выбираться по (19) при  $l_{\text{ост}_\Sigma}^{(\text{опт})}$ , удовлетворяющему (18), либо по (17) в противном случае.

**Выводы.**

1. Оптимальный план раскроя длинномерного проката является сочетанием двух базовых раскройных планов: раскроя по уставке – на отрезки заданной длины, и равномерного раскроя – на отрезки одинаковой длины.

2. Выбор раскройного плана по критерию максимальной стоимости полученных отрезков производится из двух раскройных планов: раскроя всего длинномерного проката по уставке и раскройного плана проката, когда одна часть проката раскраивается по уставке на отрезки заданной длины, а другая – равномерным раскроем на отрезки товарной длины.

3. В случае, когда известны лишь статистические характеристики переднего торца длинномерного проката, оптимальным планом раскроя длинномерного проката является раскрой по уставке, а задача оптимизации сводится к задаче определения опти-



мальной координаты первого реза, которая определяется величиной суммарного немерного остатка в длинномерном прокате после его раскроя по уставке.

4. Вероятность выкраивания из проката максимально возможного количества отрезков заданной длины не зависит от длины длинномерного проката. Она является монотонно возрастающей функцией отношения суммарного немерного остатка и С.К.О. координаты переднего торца пакета.

Авторы статьи выражают благодарность докт. техн. наук, профессору НГУ Куваеву Владимиру Николаевичу, ведущему специалисту по вопросам раскроя длинномерного проката в Украине и СНГ, за предоставленные материалы и помощь в подготовке статьи.

### Список литературы / References

1. Кузьменко А.Г. Производство мерного проката на непрерывных мелкосортных станах / Кузьменко А.Г. – М.: Металлургия, 1997. – 310 с.

Kuzmenko, A.G., (1997), *Proizvodstvo mernogo prokata na nepreryvnykh melkosortnykh stanakh* [Single-Length Rolled Products Production on Continuous Small Section Mill], Metallurgiya, Moscow, Russia.

2. Увеличение выхода мерного проката при производстве арматурных профилей / [А.Б. Юрьев, А.И. Погорелов, И.С. Кузнецов и др.] – М.: Сталь, 2003. – № 2. – С. 63–64.

Yuryev, A.B., Pogorelov, A.I. and Kuznetsov, I.S., (2003), “Single-Length Rolled Products Output Increase at Rebar Production”, *Stal*, no.2, pp. 63–64.

3. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Таха Х.А.; Перев. с англ. В.И. Тюпти – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.

Taha, Hamdy A. (2001), *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Operations Research: an Introduction], Translated by V.I. Tyupti, Viliams, Moscow, Russia.

4. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений / Ларичев О.И. – М.: Логос. 2002. – 392 с.

Larichev, O.I., (2002), *Teoriya i metody prinyatiya resheniy* [Theory and Methods of Decision-Making], Logos, Moscow, Russia.

5. Подиновский В.В. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач / Подиновский В.В., Ногин В.Д. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.

Podinovskiy, V.V., (2007), *Pareto – optimalnye reshe-niya mnogokriterialnykh zadach* [Pareto - Optimal Solutions of Multi-Criteria Problems], FIZMATLIT, Moscow, Russia.

6. Кузьменко А.Г. Мелкосортные станы. Состояние, проблемы, перспективы / Кузьменко А.Г. – М.: Металлургия, 1996. – 368 с.

Kuzmenko A.G., (1996), *Melkosortnye stany. Sostoyanie, problemy, perspektivy* [Light Section Mills. Status, Problems and Prospects], Metallurgiya, Moscow, Russia.

7. Куваев В.Н. Рациональная организация резки пакетов мелкосортного проката на стационарных ножницах / В.Н. Куваев // Сталь. – 2001. – № 2. – С. 33–35.

Kuvaev, V.N., (2001), “The rational organization of cutting package hoop on stationary scissors”, *Stal*, no.2, pp. 33–35.

8. Куваев В.Н. Принципы оптимального раскроя мелкосортного проката на полосы / В.Н. Куваев // Науковий вісник Національної гірничої академії України. – 2002. – № 2. – С. 88–91.

Kuvaev, V.N., (2002), “The principles of optimal cutting of small sections into strips”, *Naukovyi visnyk Natsionalnoi hirnychoi akademii Ukrainy*, no.2, pp. 88–91.

9. Средства и системы автоматизации в горно-металлургическом комплексе / [Учитель А.Д., Ткаченко Г.И., Хижняк В.Я., Мохнатый А.В.] – К.: ВПК „Експрес-Поліграф“, 2013. – 184 с.

Uchitel, A.D., Tkachenko, G.I., Khizhnyak, V.Ya. and Mokhnaty, A.V., (2013), *Sredstva i sistemy avtomatizatsii v gorno-metallurgicheskom komplekse* [Tools and Systems for Automation in the Mining and Metallurgical Complex], VPK “Ekspres-Poligraf”, Kiev.

10. Определение координат характерных участков пакета прутков мелкосортного проката перед его порезкой на стационарных ножницах / [В.Н. Куваев, О.А. Бойко, М.Ю. Кузьменко, Е.Д. Иванова] // Теория и практика металлургии. – 2013. – №1. – С. 74–79.

Kuvaev, V.N., Boyko, O.O., Kuzmenko, M.Yu. and Ivanova, Ye.D., (2013), “Determining the origin of characteristic segments of package rods hoop before cutting by stationary scissors”, *Teoriya i praktika metallurgii*, no. 1, pp. 74–79.

**Мета.** Знаходження закономірностей, що забезпечують оптимальний вихід товарної продукції, розкрий довгомірного прокату на різних технологічних стадіях виробництва прокату у стрижнях.

**Методика.** Методика рішення задачі оптимального розкroyу ґрунтується на комбінаторному аналізі можливих варіантів формування розкрийних планів для порізки довгомірного прокату та зіставлення їх за критерієм максимального виходу товарного прокату замовної (заданої) довжини й максимальної вартості товарного прокату. На першому етапі розглядався детермінований випадок – з відомою координатою торця довгомірного прокату, а на другому – випадок, коли становище торця довгомірного прокату описувалося ймовірнісними характеристиками.

**Результати.** Показали, що при оптимізації за критерієм максимального виходу товарного прокату замовної (заданої) довжини рішення задачі вибору розкрийного плану нетривіальне тільки для випадку, коли становище торця довгомірного прокату описувалося ймовірнісними характеристиками й полягає у виборі координати першого різку. При оптимізації за критерієм максимальної вартості товарного прокату рішення або збігається з рішенням задачі оптимізації за критерієм максимального виходу товарного прокату замовної (заданої) довжини, або є поєднанням розкroyу однієї частини довгомірного прокату на замо-

вні довжини, а іншої – на рівні відрізки товарної довжини.

**Наукова новизна.** Полягає у встановленні загальних закономірностей, що забезпечують оптимальний розкрій довгомірного прокату на різних стадіях виробництва стрижневого прокату.

**Практична значимість.** Полягає в тому, що організація управління процесами розкрою довгомірного прокату за отриманими залежностями дозволяє зменшити втрати металу на обріз і збільшити вихід товарної продукції.

**Ключові слова:** *довгомірний прокат, товарний прокат, розкрій, критерії, оптимізація*

**Purpose.** To find patterns providing optimal yield of marketable products, cutting of long products at different steps of bar rolled products manufacture process.

**Methodology.** The solving of the problem of optimal cutting is based on the combinatorial analysis of possible options applied for making cutting plans aimed on dividing of long rolled products and comparing them by maximum output of marketable rolled products (products of required length) and their maximum value. First we have considered the deterministic case where the coordinates of the long rolled products edge are provided. In the second case, the location of the edge of long products is described by probabilistic characteristics.

**Findings.** The research showed that for optimization by the maximum output of marketable rolled products (products of required length) the choice of cutting plan is uncommon only in the second case where the location of the edge of long products is described by probabilistic characteristics; and the solution consists in selection of the coordinates of the first cut. When optimizing by the maximum value of the marketable rolled products the solution either coincides with the solution of the optimization problem by the maximum output of marketable rolled products (products of required length), or is a combination of cutting one part of long product to products of required length, and another, into the equal segments of marketable length.

**Originality.** We have established the general rules that ensure optimal cutting of long rolled products in various stages of the bar rolled products manufacture.

**Practical value.** The control of the long rolled products cutting process based on the received dependencies reduces the metal loss on shorts, and increases the yield of marketable products.

**Keywords:** *long rolled products, marketable long rolled products, cutting, criteria, optimization*

*Рекомендовано до публікації докт. техн. наук  
В.В. Ткачовим. Дата надходження рукопису  
17.06.13.*