УДК 531.391

Н.В. Каряченко, Г.П. Іванова

ДО ПИТАННЯ ПРО ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ КАНАТІВ ВАНТАЖОТРАНСПОРТУЮЧИХ УСТАНОВОК З РУХОМИМ РОЗПОДІЛЕНИМ І ДИСКРЕТНИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

N.V. Kariachenko, H.P. Ivanova

QUESTIONS RELATED TO TRANSVERSAL VIBRATIONS OF ROPES OF LOAD-TRANSPORTING DEVICES WITH MOBILE DISTRIBUTED AND CONCENTRATED INERTIAL LOAD

Побудовано розв'язок диференціального рівняння поперечних коливань канатів вантажотранспортуючих установок з рухомим розподіленим інерційним навантаженням із зосередженими вантажами, які не мають поздовжнього переміщення, у вигляді суми двох груп стоячих хвиль. Побудовано рекурентні співвідношення, за допомогою яких в компактній формі записано розв'язок вирішуваних рівнянь, вирази для частот та форм поперечних коливань.

Ключові слова: *поперечні коливання, рухоме інерційне навантаження, зосереджений вантаж, двохвильовий характер процесів*

Актуальність проблеми. У багатьох сферах сучасної техніки широко застосовуються вантажотранспортуючі канатні установки, такі як, підвісні канатні дороги стаціонарного типу, кабельні крани, переносні канатні дороги і крани та інші. При дослідженні динаміки таких пристроїв важливу роль відіграє вивчення поперечних коливань канатів з розподіленим і зосередженим інерційним навантаженням.

Більшість робіт, присвячених дослідженню динамічних процесів у канатах, будується на основі подання рішень розв'язуваних рівнянь у вигляді однієї групи стоячих хвиль. Таке подання розв'язку не дозволяє описати повну динамічну картину поперечних коливань канатів на всьому діапазоні зміни швидкостей їх руху, пов'язану з двохвильовим характером процесів, що відбуваються в таких установках. Якщо при малих швидкостях руху результати, отримані при однохвильовому наведені рішення придатні до вирішення технічних задач, то зі збільшенням швидкості вантажних потоків, дослідження, проведені на підставі такого подання, призводять до значних, як якісних, так і кількісних погрішностей.

Тому для дослідження поперечних коливань канатів вантажотранспортуючих установок з рухомим масовим навантаженням необхідні методи вирішення розв'язуваних систем рівнянь, які дозволяють більш точно описати динамічні процеси, що відбуваються в них.

Постановка задачі. Двохвильове подання рішення рівнянь, які описують рух систем, що несуть рухоме масове навантаження, дає можливість провести більш повне дослідження поведінки розглянутих систем і виявити нові якісні і кількісні закономірності протікання динамічних процесів, що відбуваються в них.

Розглянемо задачу про поперечні коливання каната, апроксимуючи його як невагому струну з рівномірно розподіленим рухомим інерційним навантаженням, в яке введені зосереджені вантажі, що знаходяться на однакових відстанях один від одного. Зосереджені вантажі закріплені таким чином, що вони не повертаються з елементом струни, а виконують лише вертикальний рух і не мають поздовжнього переміщення.

Методика дослідження. Диференціальне рівняння руху каната на ділянці $[l_0, l_1]$, застосовуючи принцип Даламбера, одержимо у вигляді:

$$\rho_1(x_1)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \left(T - \rho_1(x_1)v^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \\ + \rho_1(x_1)g = 0,$$

де $w(x_1, t)$ – поперечне відхилення каната; T – натяг каната; g – прискорення земного тяжіння; ρ_0 – маса одиниці довжини каната; $\rho_1(x_1)$ – маса одиниці довжини каната і прикріплених до нього вантажів, яка дорівнює $\rho_1(x_1) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{m} M_k \delta(x_1 - x_k)$; M_k – маса *к*-го вантажу, зосередженого в точці $x_1 = x_k$; x_k – положення *к*-го вантажу при $t = 0$; $\delta(x_1 - x_k)$ – дельта-функція Дірака.

Спочатку перейдемо до нових координат $\tilde{x} = x_1 - l_0$, а потім – до безрозмірних координат та часу по формулах:

$$x = \tilde{x}/l, \ \tau = \omega_0 t,$$

де ω_0 – частота коливань однорідного вагомого нерухомого каната. Введемо малий параметр $\varepsilon = v/(\omega_0 l)$ і після необхідних перетворень отримаємо наступне диференціальне рівняння поперечних коливань каната:

$$\rho_1\left(l\left(x + \frac{l_0}{l}\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\rho_0\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} - \left(\frac{T}{\omega_0^2 l^2} - \right. \\ \left. - \rho_1\left(l\left(x + \frac{l_0}{l}\right)\right)\varepsilon^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{g}{\omega_0^2}\rho_1\left(l\left(x + \frac{l_0}{l}\right)\right) = 0, \qquad (1)$$

з граничними та початковими умовами:

$$\begin{aligned} &w(0,\tau)=0, \quad w(x,0)=f_1(x), \\ &w(1,\tau)=0, \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial \tau}=f_2(x). \end{aligned} \qquad (2)$$

Розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку гіперболічного типу зі змішаною похідною (1), нехтуючи в ньому членами, які мають множником малий параметр ε в другому степені, шукаємо у вигляді двочленного подання [1]:

$$w(x,\tau)=\varphi(x)\cos\omega\tau+\psi(x)\sin\omega\tau,$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – деякі функції, що задовольняють граничним умовам.

Рівняння форм коливань буде таким:

$$c\Phi''(x)+2ib\omega\Phi'(x)+a(x)\omega^2\Phi(x)=0, \qquad (3)$$

де

$$\Phi(x)=\varphi(x)+i\psi(x), \qquad (4)$$

$$a(x)=\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\delta(l(x-x_k)),$$

$$b=v\rho_0/(\omega_0 l), \quad c=T/\left(\omega_0^2 l_0^2\right),$$

з граничними умовами:

$$\Phi(0)=0, \quad \Phi(1)=0. \qquad (5)$$

Використовуючи перетворення Лапласа [2] і враховуючи першу граничну умову (5), після досить складних і громіздких обчислень, знайдені форми коливань запишемо в зручному та компактному вигляді:

$$\Phi(x)=\Phi'(0)\frac{1}{\gamma}e^{-\frac{\tilde b}{2}x}\{\sin\gamma x-\Phi_m(x)\},$$

де

$$\Phi_m(x)=\frac{\omega^2}{\gamma l c}\sum_{k=1}^{m}M_k\bar Z_k\sin\gamma(x-x_k)\sigma_0(x-x_k),$$

$$\bar Z_k=\sin\gamma x_k-\frac{\omega^2}{\gamma l c}\sum_{j=o}^{k-1}M_j\bar Z_j\sin\gamma(x_k-x_j),$$

$$M_0=0, \quad \bar Z_0=0, \quad \tilde b=\frac{2ib\omega}{c},$$

$$\gamma=\omega\omega_0 l\sqrt{\frac{\rho_0}{T}\left(\frac{v^2\rho_0}{T}+1\right)}.$$

За допомогою другої граничної умови (5) одержимо характеристичне рівняння для визначення частот коливань:

$$\sin\omega H-\omega L\sum_{k=1}^{m}M_k\bar Z_k\sin\omega H(1-x_k)=0, \qquad (6)$$

де

$$H=\frac{\omega_0 l}{T}\sqrt{\rho_o\left(T+\rho_0 v^2\right)},$$

$$L=\frac{\omega_0}{\sqrt{\rho_o\left(T+\rho_0 v^2\right)}}.$$

Визначивши корні рівняння (6) ω_n одним із чисельних методів, знайдемо окремі розв'язки $\Phi_n(x)$, а отже, враховуючи (4), $\varphi_n(x)$ і $\psi_n(x)$.

Повний розв'язок диференціального рівняння поперечних коливань канатів (1), що складається із суми окремих розв'язків, отримаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} w(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\big(\varphi_n(x)\cos(\omega_n\tau+\gamma_n)+ \\ +\psi_n(x)\sin(\omega_n\tau+\gamma_n)\big), \end{aligned} \qquad (7)$$

де a_n і γ_n – сталі, які визначаються із початкових умов;

$$\varphi_n(x)=\Psi_n(x)\cos b_{1n}x, \quad \psi_n(x)=-\Psi_n(x)\sin b_{1n}x, \qquad (8)$$

$$\Psi_n(x)=\sin\omega_n H-$$

$$-\omega_n L\sum_{k=1}^{m}M_k\bar Z_k\sin\omega_n H(x-x_k)\sigma_0(x-x_k),$$

$$b_{1n}=\frac{b\omega_n}{c};$$

$\varphi_n(x)$ – форми власних коливань каната; $\psi_n(x)$ – форми „супровідних“ коливань каната.

Здійснюючи аналіз формул (8) приходимо до висновку, що при швидкості каната, яка дорівнює нулю, усі $\psi_n(x)$ також дорівнюють нулю і розв'язок (7) відповідає розв'язку рівняння коливань нерухомого вагомого каната із закріпленими на ньому зосередженими вантажами. Зі збільшенням швидкості руху амплітуди „супровідних“ коливань зростають та стають порівняними з амплітудами власних коливань, тому нехтувати ними не можна.

Досліджуючи розв'язок рівняння (6), встановимо, що при наявності між опорами трьох, чотирьох та більше вантажів, частоти коливань фактично залишаються сталими, тобто не залежать від положення вантажів. Тому має сенс розв'язати диференціальне рівняння руху каната при усереднених коефіцієнтах та порівняти результати його розв'язку з отриманими вище результатами. В цьому випадку одержимо наступне однорідне диференціальне рівняння поперечних коливань каната:

$$\rho_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho_0 v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left(T-\rho_1(x)v^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (9)$$

Рівняння форм коливань прийме вигляд:

$$a(x)\Phi''(x)+2ib\Phi'(x)+c(x)\Phi(x)=0\,, \qquad (10)$$

де

$$a(x)=T-\rho_1(x)v^2, \quad b=\rho_0\omega v, \quad c(x)=\rho_1(x)\omega .$$

Коефіцієнти рівняння (10) усереднимо по довжині ділянки каната між опорами і підставимо їх в рівняння (10):

$$a\Phi''(x)+2ib\Phi'(x)+c\Phi(x)=0\,. \qquad (11)$$

Диференціальне рівняння (11) за виглядом співпадає з рівнянням (17.5) роботи [1].

Побудував розв’язок (11) методом, наведеним в [1], після необхідних обчислень, визначимо частоти коливань наступним виразом:

$$\omega_n=\frac{n\pi\left(T-\left(\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)v^2\right)}{l\sqrt{T\left(\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)-\left(2\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)v^2\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l}}=n\omega_1 \qquad (12)$$

Із (12) при $\omega_1=0$ отримаємо першу критичну швидкість:

$$v_1=\sqrt{\frac{T}{\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l}}\,.$$

Під критичною швидкістю руху вважаємо швидкість, яка визначає зону стійкості роботи системи, вихід за межі якої призводить до різкого зростання динамічних навантажень і зниження працездатності системи.

Другу критичну швидкість визначимо, дорівнюючи нулю знаменник у виразі частот коливань:

$$v_2=\sqrt{\frac{T\left(\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)}{\left(2\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l}}\,.$$

Вирази, які визначають форми власних і „супровідних“ коливань, мають наступний вигляд:

$$\varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\rho_0 v x}{l\beta},$$

$$\psi_n(x)=-\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\rho_0 v x}{l\beta},$$

де

$$\beta=\sqrt{T\left(\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)-\left(2\rho_0+\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l\right)}\times$$
$$\times\sqrt{v^2\sum_{k=1}^{m}M_k\Big/l}.$$

Повний розв’язок диференціального рівняння (9) запишеться у вигляді суперпозиції двох груп стоячих хвиль, аналогічному (7).

Висновки. Проведений аналіз отриманих результатів і графіків поведінки частот коливань, першої та другої критичних швидкостей, форм власних і „супровідних“ коливань, залежно від швидкості руху канатів, показує, що коли на ділянці між опорами знаходиться декілька вантажів (більше 3-х, 4-х), досить точно для визначення частот коливань можна застосовувати формулу (12), з якої видно, що при швидкості руху канатів, яка дорівнює першій критичній швидкості, всі власні частоти коливань рівні нулю, тобто відбувається втрата стійкості; при подальшому збільшенні швидкості відбувається різке зростання значень власних частот і, при досягненні другої критичної швидкості, частоти власних коливань стають нескінченними; далі частоти будуть комплексними, що відповідає повній втраті стійкості.

Список літератури

1. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины. – К.: Наук. думка, 1971. – 224 с.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

Построено решение дифференциального уравнения поперечных колебаний канатов грузотранспортирующих установок с подвижной распределенной инерциальной нагрузкой, в которую введены сосредоточенные грузы, не имеющие продольного перемещения, в виде суммы двух групп стоячих волн. Построены рекуррентные соотношения, с помощью которых в компактной форме записаны решение разрешающих уравнений, выражения для частот и форм поперечных колебаний.

Ключевые слова: *поперечные колебания, подвижная инерциальная нагрузка, сосредоточенный груз, двухволновой характер процессов*

Solution of differential equation of transversal vibrations of ropes of load-transporting devices bearing mobile distributed inertial load with concentrated weights, which do not have longitudinal moving, as a sum of two groups of standings waves has been evaluated. Recurrent expressions, in which there have been written the decisions of equalizations in compact form, expressions for frequencies and forms of transversal oscillations have been evaluated.

Keywords: *transversal oscillations, mobile inertial load, concentrated loading, two-wave character of processes*

Рекомендовано до публікації д.т.н. О.М. Шашенком 02.02.10