

# ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА, ЗБАГАЧЕННЯ КОРИСНИХ КОПАЛИН

УДК 622.831.3.001

© Васильев Д.Л., Ус Ю.М., Костандов Ю.А., Потапенко А.А., Ангеловский А.А., Чугунков И.Ф., 2010

## Д.Л. Васильев, Ю.М. Ус, Ю.А. Костандов, А.А. Потапенко, А.А. Ангеловский, И.Ф. Чугунков ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СЖАТИИ ГОРНЫХ ПОРОД

D.L. Vasilev, Yu.M. Us, Yu.A. Kostandov, A.A. Potapenko, A.A. Angelovskiy, I.F. Chugunkov

## A SUBSTITUTION OF CALCULATION METHODS FOR A CONTACT STRESSES ROCK COMPRESSION

Проведен поиск зависимостей между контактными нормальными и касательными напряжениями в момент разрушения образца, в наибольшей степени удовлетворяющих уравнениям равновесия и экспериментальным данным. Дана сравнительная оценка двух методов расчета, с использованием экспериментальных данных зависимости коэффициента контактного трения от удельной нагрузки горных пород, один из которых в большей степени соответствует экспериментальным наблюдениям.

**Ключевые слова:** горная порода, предел прочности, внешнее трение, контактные напряжения, разрушение

В работе [1] дан метод расчета предела прочности горных пород на основании дифференциального и алгебраического уравнений равновесия, в отличие от смежной области – обработка металлов давлением (где используется одно дифференциальное уравнение), с учетом линейной связи между контактными нормальными  $\sigma_y$  и касательными напряжениями  $\tau_k$  от трения согласно закону Кулона-Амонтона

$$\tau_k = f\sigma_y. \quad (1)$$

Авторами получено существенное увеличение расчетных значений предела прочности образцов горных пород по сравнению с экспериментальными данными. Наряду с этим было проведено определение экспериментальных зависимостей сдвигающих усилий от нормальной нагрузки при сжатии горных пород.

В совокупности, в результате теоретических и экспериментальных исследований был сделан вывод о несоблюдении упомянутого закона применительно к сжатию горных пород. Однако, ими не даны рекомендации по выявлению закономерностей контактных напряжений, в наибольшей степени удовлетворяющих уравнениям равновесия и экспериментальным данным предела прочности.

С целью исключения этого пробела рассмотрим полученные авторами экспериментальные данные и по ним построим зависимости коэффициента контактного трения от нормального сжимающего напряжения  $\sigma_y$  (рис. 1). Коэффициент трения по мере увеличения нагрузки резко снижается и стремится к стабилизации, вернее, по-видимому, к стабилизации касательного контактного напряжения. Для опреде-

ления конкретной связи между контактными нормальными и касательными напряжениями проведем анализ возможности использования линейной аппроксимации кривой  $f(\sigma_y)$  в момент разрушения образца. Используем два способа представления этой зависимости: линейной или принятием значения контактных касательных напряжений постоянными в момент разрушения.

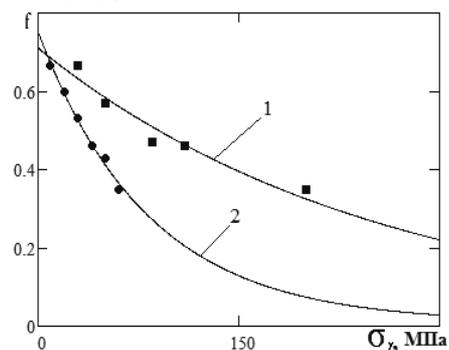


Рис. 1. Зависимость коэффициента контактного трения от удельной нагрузки: 1 – габро; 2 – мрамор

Представим зависимость текущего коэффициента контактного трения в виде линейной функции

$$f_i = f - t \cdot (\sigma_y - \sigma_{y0}), \quad (2)$$

где  $f$  – коэффициент контактного трения в угловой точке;  $t$  – коэффициент уменьшения  $f$  в момент разрушения образца;  $\sigma_{y0}$  – начальное нормальное раз-

рушающее напряжение в угловой точке образца;  $\sigma_y$  – текущее нормальное напряжение в процессе разрушения в вершине трещины.

Для решения поставленных задач оговорим граничные условия. В качестве исходного объекта возьмем выпуклый, вследствие деформирования, образец (рис. 2), удовлетворяющий условиям парности касательных напряжений в угловых областях. Сжимающие напряжения принимаем положительными. Знаки касательных напряжений: на верхней левой вертикальной половине – положительный, на верхней правой – отрицательный. На нижних половинах знаки имеют противоположные значения.

Теперь запишем при заданных осях координат дифференциальные уравнения равновесия для плоской деформации [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma_x, \tau_{xy}$  – горизонтальные нормальные и касательные напряжения;  $x, y$  – координаты.

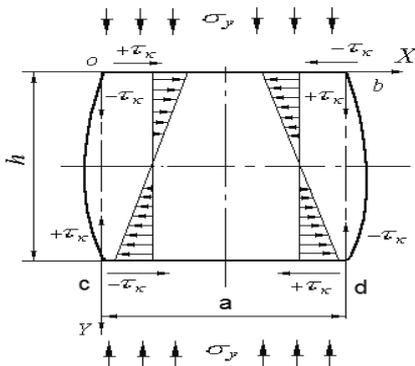


Рис. 2. Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения

Присовокупим к этим дифференциальным уравнениям алгебраическое уравнение равновесия [2]

$$\sigma_x = \frac{2(k_n + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} \left( \sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2} \right) + \sigma_y, \quad (4)$$

где  $k_n$  – предел сопротивляемости породы сдвигу;  $\mu$  и  $\rho$  – коэффициент и угол внутреннего трения породы;  $b_a = \frac{\tau_k}{k_n + \mu\sigma_y}$  – параметр трения.

Как известно, эти условия равновесия элемента тела обязательны для всех точек деформируемого тела.

Следует отметить, что у исследователей [2] в смежной области (обработки металлов давлением) возникли непреодолимые трудности точного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного состояния

при наличии трения, вследствие чего они были вынуждены вводить упрощающие предпосылки, в частности принимать, что нормальные напряжения зависят только от одной из координат. В результате число дифференциальных уравнений сокращается до одного, которое будет содержать простые производные вместо частных. Как правило, задачу решают при предельном значении контактного касательного напряжения  $\tau_k$ , равного пределу сопротивления материала сдвигу  $k_n$ . В этом случае получено соотношение  $\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{d\sigma_x}{dx}$ .

В области обработки металлов этого достаточно, так как они ограничивают свое решение определением максимального контактного удельного усилия деформирования. Проверка на экспериментальных данных таким образом полученного приближенного метода расчета деформирующих усилий подтвердила его вполне удовлетворительную практическую точность. Поскольку нас интересует связь между напряжениями внутри материала, т.е. при изменении касательных напряжений  $\tau_k$  по мере удаления от контактной поверхности, для построения в последующем запредельных кривых разрушения возникает необходимость определения упомянутого соотношения не только на контактной поверхности, но и внутри тела, при том, что  $\tau_k < k_n$ .

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , по мере удаления от каждой из контактных поверхностей, по абсолютной величине уменьшаются и при  $y = 0,5$  обращаются в нуль, как на оси симметрии. Допустим, что напряжения  $\tau_{xy}$  являются линейной функцией оси  $y$ , т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_k \left( 1 - \frac{2Y}{h} \right). \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = -\frac{2\tau_k}{h}. \quad (6)$$

Теперь найдем связь между производными  $\frac{d\sigma_y}{dx}$  и  $\frac{d\sigma_x}{dx}$  при любых соотношениях  $\tau_{xy}$ . Для этого про-

дифференцируем выражение (4) по  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} = & \left[ \frac{2\mu}{\cos \rho} \left( \sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2} \right) + 1 \right] \frac{d\sigma_y}{dx} + \\ & + \frac{2(k_n + \mu\sigma_y) \cdot b_a}{\cos \rho \sqrt{1 - b_a^2}} \cdot \frac{db_a}{dx}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр  $b_a$  с учетом (1), (2), (5) будет

$$b_a = \frac{f - t(\sigma_y - \sigma_{y_0}) \cdot \sigma_y}{k_n + \mu\sigma_y} \cdot \left( 1 - \frac{2Y}{h} \right).$$

Производная от  $b_a$  по

$$\frac{db_a}{dx} = \frac{[(f + t\sigma_{y_0}) - 2t\sigma_y] - \mu b_a}{k_n + \mu\sigma_y} \times \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \cdot \frac{d\sigma_y}{dx \cdot h}.$$

Тогда выражение (7) будет иметь окончательный вид

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \left[ \frac{1 + 2\mu^2 - \frac{2\mu \cdot \sqrt{1 - b_a^2}}{\cos \rho}}{2 \cdot b_a (f + t\sigma_{y_0} - 2t\sigma_y - 2\mu b_a^2)} + \frac{2\tau_k}{uh} \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \right] \frac{d\sigma_y}{dx \cdot h}.$$

Обозначив выражение в больших скобках через  $u$ , получим

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{d\sigma_x}{dx}. \quad (8)$$

Используя первое дифференциальное уравнение (3) и выражения (6) и (8), имеем

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{2\tau_k}{uh}. \quad (9)$$

По закону Кулона с учетом (1) и (2) выражение (9) представим в виде

$$\frac{d\sigma_y}{(f - t \cdot (\sigma_y - \sigma_{y_0}))\sigma_y} = \frac{2}{uh} dx. \quad (10)$$

Для решения дифференциального выражения (10) используем метод неопределенных коэффициентов.

Из решения уравнения (10) получим

$$\frac{1}{f + t\sigma_{y_0}} \ln \frac{t\sigma_y}{t\sigma_y - (f + t\sigma_{y_0})} = \frac{2x}{uh} + \ln C.$$

Определим постоянную интегрирования при условии, что при  $x = 0$   $\sigma_y = \sigma_{y_0}$ .

Окончательно получим

$$\sigma_y = \frac{(f + t\sigma_{y_0}) \cdot \sigma_{y_0}}{f \exp\left(-\frac{2(f + t\sigma_{y_0})x}{uh}\right) + t \cdot \sigma_{y_0}}.$$

Теперь, используя эту закономерность распределения контактных нормальных напряжений, найдем их сумму на контактной поверхности, т.е. полное давление на единицу ширины образца. Разделив полное давление на длину контактной поверхности, получим значение удельного давления – предел прочности образца одноосному сжатию

$$P_1 = \frac{f + t\sigma_{y_0}}{2t} + \frac{u}{2t} \ln \frac{t\sigma_{y_0} + f \cdot e^{\frac{f + t\sigma_{y_0}}{uh}} + t\sigma_{y_0}}{f + t\sigma_{y_0}}. \quad (11)$$

Сравним полученное значение предела прочности с проверенным по экспериментальным данным разрушения образцов горных пород другим выражением этого предела [4]

$$P_2 = \sigma_{y_0} \cdot \frac{h}{f \cdot a} \left( e^{\frac{f \cdot a}{h}} - 1 \right) \quad (12)$$

и построим график их отношений  $\frac{P_1}{P_2}$  (рис. 3).

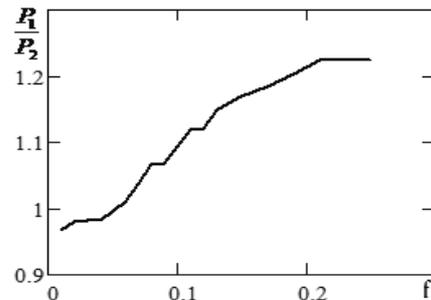


Рис. 3. Зависимость отношения удельных давлений, рассчитанных по формулам (11 и 12), от коэффициента внутреннего трения

Анализ полученной зависимости свидетельствует о некоторых отклонениях расчетных результатов от экспериментальных данных. Для окончательного решения о возможности использования данного подхода, следует провести проверку полученных по методу [4] предельных кривых разрушения с экспериментальными данными.

Теперь перейдем к поиску определения закономерностей распределения контактных напряжений при постоянном значении касательных напряжений.

Анализируя кривую (рис.1), можно с высокой вероятностью предположить, что контактные касательные напряжения в предельном состоянии образца стабилизируются и не зависят от  $x$ .

В этом случае параметр  $b_a$  не зависит от  $x$ . Тогда параметр  $u$  в формуле (8)

$$u = 1 + 2\mu^2 - \frac{2\mu \sqrt{1 - b_a^2}}{\cos \rho},$$

где параметр  $b_a = \frac{\tau_k}{k_n + \mu\sigma_y} \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right)$ .

Из решения уравнения (9) имеем

$$\sigma_y = \frac{2\tau_k}{u \cdot h} \cdot x + c.$$

Учитывая, что при  $x = 0$  постоянная интегрирования  $c = \sigma_{y_0}$ , получим

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + \frac{2\tau_k}{u \cdot h} \cdot x.$$

Теперь следует определиться с описанием значения  $\tau_k$ .

По этому поводу многие специалисты [2] в области обработки металлов пишут, что при увеличении предельного давления деформация контактной поверхности, необратимо приближающая действительную площадь к номинальной, обуславливает потери линейной зависимости (1) сил трения от нормальной нагрузки. Поэтому ряд исследователей рекомендовали принимать трение независимым от нормальной нагрузки, а коэффициент контактного трения  $f$  принимать по пределу прочности, равным  $f_s$

$$\tau_{\epsilon} = f_s \cdot \sigma_{y_0} \quad (13)$$

Тогда

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} (1 + 2f_s \cdot x / (u \cdot h)) \quad (14)$$

На рис. 4 представлены эпюры контактных касательных по уравнениям (13) и (14) нормальных напряжений.

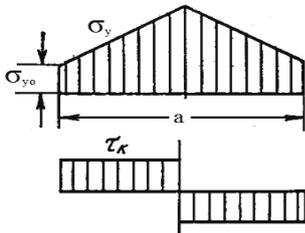


Рис. 4. Эпюры контактных нормальных и касательных напряжений

Суммируя нормальные напряжения на контактной поверхности на единицу ширины образца, находим полное давление. Разделив полученное значение на длину образца, находим удельное давление – предел прочности

$$P_3 = \sigma_{y_0} \left( 1 + \frac{f_s \cdot a}{2h \cdot u} \right) \quad (15)$$

Теперь оценим сходимость расчетных данных с экспериментальными. Снова используем выражение (12) и находим отношение  $\frac{P_3}{P_2}$  (рис. 5)

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{1 + f_s \cdot a / (2h \cdot u)}{1 / f_s \cdot \left( e^{f_s \cdot a / h} - 1 \right)} \quad (16)$$

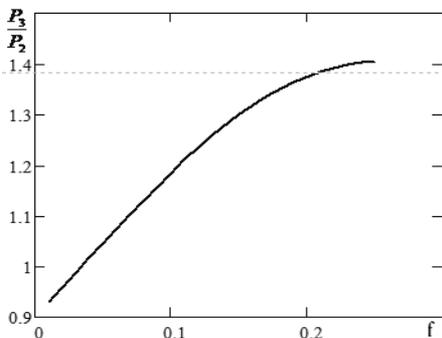


Рис.5. Зависимость отношения удельных давлений, рассчитанных по формулам (15) и (16), от коэффициента внутреннего трения

Учитывая, что формула (12) на 10–15% снижает расчетные данные по сравнению с экспериментальными данными, а формулы (11) и (15) завышают эти значения по сравнению с ней на 20–35%, получим, что предлагаемые методы расчета предела прочности обеспечивают сходимость расчетных данных с экспериментальными данными в 85–90%, т.е. достоверность формул (11), (12) и (15) примерно одинакова. Но важность методов расчета распределения контактных нормальных и касательных напряжений, по сравнению с другими известными методами, заключается в том, что они разработаны на основе одного дифференциального и одного алгебраического уравнений равновесия с учетом экспериментальной зависимости  $f_i = F(\sigma_y)$ .

Это очень важно, так как изложенные подходы расчета распределения контактных напряжений позволяют определить напряжения внутри тела, осуществить определение запредельных кривых разрушения, а также построить диаграммы „напряжение-деформация“ для различных форм разрушения образцов горных пород при одноосном и объемном сжатии. Более того, объяснить: аномальные виды разрушения горных пород вдоль сжимающей нагрузки по плоскостям, по которым, по современной теории механики горных пород, нет никаких напряжений; превышение горизонтальных напряжений над вертикальными, их порождающими; процессы спонтанного саморазрушения горных пород и другие.

**Выводы.** Разработаны методы расчета контактных нормальных и касательных напряжений, позволяющие проводить расчет предела прочности напряжений внутри тела при его разрушении и открывающие возможность объяснить аномальные виды разрушения, что и будет представлено авторами в последующих статьях.

**Список литературы**

1. Анализ связи между контактными напряжениями при сжатии горных пород. / Васильев Л.М., Цепков К.В., Пазынич А.В. [и др.] // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2009. – Вып. 81. – С. 217–226.
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
3. Васильев Д.Л. Закономерности формирования горизонтальных нормальных напряжений в массиве горных пород / Васильев Д.Л. // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2001. – Вып. 29. – С. 17–21.
4. Васильев Д.Л. Расчет предела прочности образцов горных пород при их разрушении в виде усеченных пирамид / Васильев Д.Л. // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2003–Вып.47.–С.91–98.

Здійснено пошук залежностей між контактними нормальними та дотичними напруженнями на момент руйнування зразка, які найбільшою мірою задовольняють рівнянням рівноваги та експериментальним да-

ним. Дана порівняльна оцінка двох методів розрахунку, з використанням експериментальних даних залежності коефіцієнта контактної тертя від питомого навантаження гірських порід, один з яких більшою мірою відповідає експериментальним спостереженням.

**Ключові слова:** гірська порода, межа міцності, зовнішня тертя, контактна напруга, руйнування

It is executed a search of the most satisfying to equilibrium equations and experimental data regularities between contact normal tensions and tangent ones in the

moment of destruction of samples. The comparative evaluation of two calculation methods is given, with the use of experimental data of the contact friction coefficient dependence on specific loading of rock, one of which increasingly corresponds to the experimental observations.

**Keywords:** rock, ultimate stress, external friction, contact stress, destruction

Рекомендовано до публікації д.т.н., Б.В. Виноградовим 08.07.10

УДК 553.21/.24

© Соболев В.В., Білан Н.В., 2010

В.В. Соболев, Н.В. Білан

## ДО ПИТАННЯ ОЦІНКИ РОЗЧИННОСТІ МЕХАНОАКТИВОВАНОГО КВАРЦУ У ВОДІ

V.V. Soboliev, N.V. Bilan

## ON THE ISSUE OF THE WATER SOLUBILITY ESTIMATION OF THE MECHANICALLY ACTIVATED QUARTZ

Наведено розрахунки розчинності у воді механічно активованого кварцу в діапазоні температур 300÷800 К. Запропоновано формулу, що додатково враховує енергію однієї дислокації введенням нового коефіцієнта, в якій входить також і диференціальна теплота розчинення, яка, в середньому, залишається постійною в цьому діапазоні температур. За цими розрахунками побудовано залежності розчинності кварцу від температури при різних значеннях щільності дислокацій на поверхні кварцу. Встановлено, що розчинність кварцу, що деформується, залежить у меншій мірі від температури, ніж від щільності поверхневих активних станів. Показано, що запасена кристалом енергія пропорційна щільності дислокацій – активних поверхневих центрів, знижує енергетичний бар'єр хімічних реакцій утворення зародків нової фази.

**Ключові слова:** механоактивація, розчинність кварцу, запасена енергія

Відомо, що хімічна активність твердих тіл різко зростає в результаті їх механічної обробки, що зумовлене утворенням на їх поверхнях деформованого матеріалу активних центрів, збільшення щільності яких приводить, відповідно, до зростання хімічної активності.

У науковій літературі велика увага приділяється кварцу, як основному породоутворюючому мінералу, зокрема, механоактивованому кварцу і процесам його розчинення в гідротермальних розчинах [1–4 та ін.].

Формування інфільтраційних метасоматичних колон відбувалося за рахунок високої проникності матеріалу сколювальних зон. За даними [5], проникність рихлого кластичного матеріалу цих зон на чотири-вісім порядків вища, ніж, наприклад, проникність інтрузивів.

Висока проникність – це лише показник, що свідчить про високу питому поверхню матеріалу. Для здійснення високоактивних реакцій необхідно, щоб поверхня матеріалу характеризувалася і високою щільністю хімічно активних центрів. Найбільш вірогідно, що такому стану відповідає матеріал сколювальних зон, зокрема, кварц.

Розчинність кварцу у воді при температурах від 300 до 800 К, характерних для гідротермальних систем, розраховуємо, скориставшись рівнянням стану водної змішаної фази, що знаходиться в рівновазі з кварцем [1]

$$\lg L = 2 \lg \rho_B - \frac{2071}{T} + 3,68 \quad (\text{г SiO}_2 / \text{кг H}_2\text{O}), \quad (1)$$

де  $L$  – розчинність кварцу у воді по реакції  $\text{SiO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons [\text{Si}(\text{OH})_4]$ ;  $\rho_B$  – щільність водної фази,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Залежність розчинності кварцу  $\lg L$  від температури представлена на графіку рис. 1.

З графіка видно, що розчинність  $\text{SiO}_2$  сильно залежить від температури: у діапазоні  $T=(400-900)$  К розчинність збільшується майже на 100%.

Припустимо, що диференціальна теплота розчинення  $Q$  у середньому залишається постійною ( $Q$  входить у другий член рівняння (1) у вигляді,  $\frac{Q}{RT} \lg e$ , де  $R = -1,986$  кал/град), а поверхня кварцу

є механоактивованою, вираженою через щільність поверхневих активних центрів –  $C_A$  (у даному випадку – дислокацій). У цьому випадку, після нескладних перетворень рівняння (1) одержимо рівняння стану, що враховує активні стани на поверхні кварцу

$$\lg L^* = 2 \lg \rho_B + \left( \frac{\lg C_A - 3,68}{7,5} \right) \lg C_A - \frac{2071}{T} \quad (\text{г SiO}_2 / \text{кг H}_2\text{O}), \quad (2)$$

де  $L^*$  – розчинність активованого кварцу;  $C_A = 10^n$  ( $n = 7,5 \dots 12$ ).