

Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Д.Л. Васильев

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕЩИНЫ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

### STABILITY OF CRACK AT MONAXONIC COMPRESSION TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL FRICTION

Для горных пород, обладающих естественной трещиноватостью и блочной структурой, образованной системами различно ориентированных трещин характерно разрушение в результате развития наиболее опасных трещин, которые легко инициируемы при данных условиях. В работе рассматривается задача о предельном равновесии пластины с макроскопической трещиной. Материал пластины подчиняется закону Гука вплоть до момента разрушения. В результате анализа напряженного состояния в вершине трещины установлены зависимости: предельного сжимающего напряжения от коэффициента внутреннего трения и ориентации сжимающей нагрузки относительно начальной трещины; угла, определяющего направление развития начальной трещины, от коэффициента внутреннего трения материала; ориентации наиболее опасной трещины от условий контакта берегов трещины.

**Ключевые слова:** трещиноватость, ориентированные трещины, предельное сжимающее напряжение.

Во многих работах о разрушении материалов считается, что после образования большого числа малых трещин происходит преимущественное развитие лишь некоторых наиболее опасных трещин, которые легко инициируемы при данных условиях. Такой характер разрушения является характерным для горных пород, обладающих естественной трещиноватостью и блочной структурой, образованной системами различно ориентированных трещин. За счет этого их разрушение происходит, как правило, по отдельным плоскостям ослабления. В связи с этим возникают задачи определения параметров предельного состояния горных пород, ослабленных трещинами, и выявления наиболее опасных трещин.

В настоящей работе рассматривается задача о предельном равновесии пластины с макроскопической трещиной, когда плоскость трещины не совпадает с плоскостью симметрии внешних напряжений. Рассмотрим бесконечную пластину с прямолинейной произвольно ориентированной трещиной длиной  $2l$  (рис. 1), полагая, что в бесконечно удаленных точках пластины приложена одноосная сжимающая нагрузка  $p$ . Предположим, что материал пластины подчиняется закону Гука вплоть до момента разрушения. Определим предельное значение напряжения  $p = p^*$  при одноосном сжатии.

Согласно линейной механике разрушения напряжения в вершине трещины определяются следующими формулами [1]:

$$\sigma_\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_1 \left( 3\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{3}{2}\beta \right) - 3k_2 \left( \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{3}{2}\beta \right) \right\} + 0(1), \quad (1)$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_1 \left( \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{3}{2}\beta \right) + k_2 \left( \cos\frac{\beta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\beta \right) \right\} + 0(1),$$

где  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_{r\beta}$  – нормальные и касательные напряжения в полярных координатах  $r$  и  $\beta$ ;  $k_1$ ,  $k_2$  – коэффици-

енты интенсивности напряжений в вершине трещины;  $0(1)$  – ограниченная часть компоненты тензора напряжений при  $r \rightarrow 0$ .

В случае одноосного сжатия  $k_1 = 0$ , а  $k_2 = p\sqrt{l}(\sin\alpha\cos\alpha - f\sin^2\alpha)$ . Здесь  $f$  – коэффициент трения скольжения, которое может возникнуть между берегами трещины при их соприкосновении и проскальзывании друг относительно друга. С учетом этого выражения (1) принимают вид:

$$\sigma_\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ -3k_2 \left( \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{3}{2}\beta \right) \right\} + 0(1),$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_2 \left( \cos\frac{\beta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\beta \right) \right\} + 0(1), \quad (2)$$

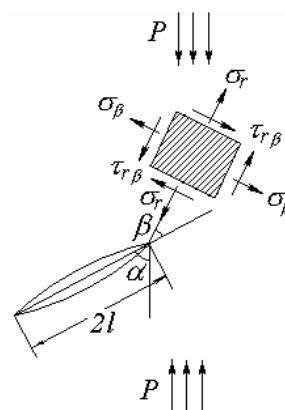


Рис. 1. Трещина в бесконечной пластине при одноосном сжатии

Будем считать, что начальное распространение трещины происходит в плоскости, для которой эффективные касательные напряжения  $\tau$ , имеют максимальные значения.

Тогда на основании этой гипотезы для определения предельных значений внешних напряжений получаем уравнение

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \tau_s^*(r, \beta^*) \right\} = \frac{L_c}{\pi}, \quad (3)$$

где  $\tau_s^*(r, \beta^*)$  – эффективные касательные напряжения при  $p = p^*$ ;  $L_c$  – модуль сцепления при сдвиге;  $\beta^*$  – угол, определяющий начальное направление распространения трещины [2].

Под понятием эффективного касательного напряжения  $\tau_s$  понимается активное касательное напряжение  $\tau_{r\beta}$  за вычетом фрикционной составляющей [3]. В полярных координатах подобные напряжения, согласно закону Кулона, записываются в виде

$$\tau_s = \tau_{r\beta} - \mu \sigma_\beta, \quad (4)$$

где  $\mu$  – коэффициент внутреннего трения материала.

Учитывая (2), выражение (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \tau_s = & \frac{1}{4\sqrt{2}r} k_2 \left( \cos \frac{\beta}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \beta \right) + \\ & + \mu \frac{1}{4\sqrt{2}r} 3k_2 \left( \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta \right) + 0(1). \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражений (3) и (5) получим

$$\frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ \left( \cos \frac{\beta^*}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \beta^* \right) + 3\mu \left( \sin \frac{\beta^*}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta^* \right) \right\} = \frac{L_c}{\pi}. \quad (6)$$

Угол  $\beta = \beta^*$ , определяющий начальное направление распространения трещины, находим из условия экстремума (максимума) функции  $\tau_s(r, \beta)$  по  $\beta$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \frac{\partial \tau_s(r, \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta = \beta^*} = 0.$$

Полученное выражение представляет собой кубическое уравнение

$$2tg^3 \frac{\beta^*}{2} - 6\mu tg^2 \frac{\beta^*}{2} - 7tg \frac{\beta^*}{2} + 3\mu = 0. \quad (7)$$

Для нахождения корней уравнения (7) сделаем

подстановку  $tg \frac{\beta^*}{2} = y + \mu$ . Тогда уравнение (7) примет вид

$$y^3 - (3\mu^2 + 3,5)y - 2\mu(\mu^2 + 1) = 0. \quad (8)$$

Дискриминант  $D$  уравнения (8) равен

$$D = -(1,5\mu^4 + 3,08\mu^2 + 1,59).$$

Следовательно,  $D < 0$  при любом  $\mu$ . В этом случае корни уравнения (8) выражаются в виде:

$$\beta_j^* = 2arctg(y_j + \mu), \quad (9)$$

где  $j = 1, 2, 3$ , а  $y_j$  находим по формулам:

$$y_1 = 2R \cos \frac{\phi}{3}; \quad y_2 = R \left( -\cos \frac{\phi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3} \right);$$

$$y_3 = R \left( -\cos \frac{\phi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3} \right),$$

где  $R = \sqrt{\mu^2 + 1,17}$ ;  $\phi = \arccos \frac{\mu(\mu^2 + 1)}{(\mu^2 + 1,17)\sqrt{\mu^2 + 1,17}}$ .

Таким образом, оказывается, что величина  $\beta^*$  зависит только от коэффициента внутреннего трения материала и не зависит от приложенной нагрузки.

Расчет величин  $\beta_j^*$  по (9) при  $0 \leq \mu \leq 1$  дает, что

$$123,82^\circ \leq \beta_1^* \leq 140,90^\circ, \quad -130,28^\circ \leq \beta_2^* \leq -123,82^\circ \text{ и}$$

$0^\circ \leq \beta_3^* \leq 37,74^\circ$ . Значения  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$  не соответствуют физическому смыслу, т.к. при таких значениях углов трещина начала бы развиваться почти в противоположную сторону. Поэтому принимаем, что

$$\begin{aligned} \beta^* = \beta_3^* = 2arctg(y_3 + \mu) = \\ = 2arctg \left[ R \left( -\cos \frac{\phi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3} \right) + \mu \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта зависимость приведена на рис. 2.

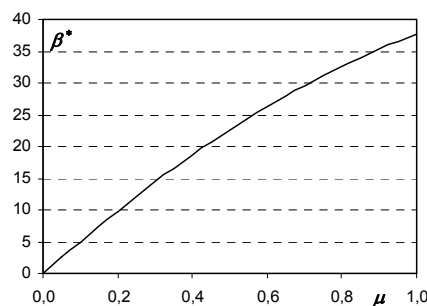


Рис. 2. Зависимость угла начального направления распространения трещины  $\beta^*$  от коэффициента внутреннего трения  $\mu$

Теперь из уравнения (6) находим выражение для предельного напряжения

$$p^* = \frac{4\sqrt{2}L_c}{\pi \sqrt{l} (\sin \alpha \cos \alpha - f \sin^2 \alpha) (c_1 + 3\mu c_2)}, \quad (11)$$

где  $c_1 = \cos \frac{\beta^*}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \beta^*$ ;  $c_2 = \sin \frac{\beta^*}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta^*$ .

Таким образом, зная коэффициент внутреннего трения материала  $\mu$  и угол наклона трещины  $\alpha$ , по формулам (10) и (11) можно найти значения начального угла распространения трещины  $\beta^*$  и величину предельного напряжения  $p^*$  для каждой конкретной задачи.

Из выражения (11) следует, что с ростом  $\mu$  значение  $p^*$  уменьшается. Следовательно, чем больше коэффициент внутреннего трения  $\mu$ , тем чувствительней материал к наличию в нем трещин, т.е. разрушение в нем начинается при меньших значениях предельного напряжения  $p^*$ .

Для решения практических задач часто бывает необходимо знать ориентацию наиболее опасной трещины, угол наклона которой находится из условия экстремума для предельного напряжения  $p^*$ :

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} = 0. \quad (12)$$

Из выражений (11) и (12) получаем  $\cos 2\alpha_0 - f \sin 2\alpha_0 = 0$ ,

где  $\alpha_0$  – угол наклона наиболее опасной трещины.

Отсюда

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{f}. \quad (13)$$

Если  $f = \mu$ , что соответствует полному контакту между берегами трещины, то

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}.$$

Учитывая, что  $\mu = \operatorname{tg} \rho$ , где  $\rho$  – угол внутреннего трения, можем записать:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

Если в выражении (13) положить  $f = 0$ , то самая опасная трещина в материале будет ориентирована под углом  $\alpha_0 = \pi/4$ , что соответствует теории прочности по максимальным касательным напряжениям.

Введем безразмерную величину предельного напряжения  $p^*$ :

$$p_m^* = \frac{\pi \sqrt{l} p^*}{4 \sqrt{2} L_c} = \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha - f \sin^2 \alpha)(c_1 + 3\mu c_2)}. \quad (14)$$

Используя выражение (14), построим графики зависимостей  $p^*$  от коэффициента внутреннего трения  $\mu$  для различных углов ориентации трещины  $\alpha$  при отсутствии трения между берегами трещины, т.е. при  $f = 0$ , которые приведены на рис. 3. На этом рисунке графики приведены для углов  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ , поскольку при  $f = 0$  выражение (14) симметрично относительно  $\alpha = \pi/4$ .

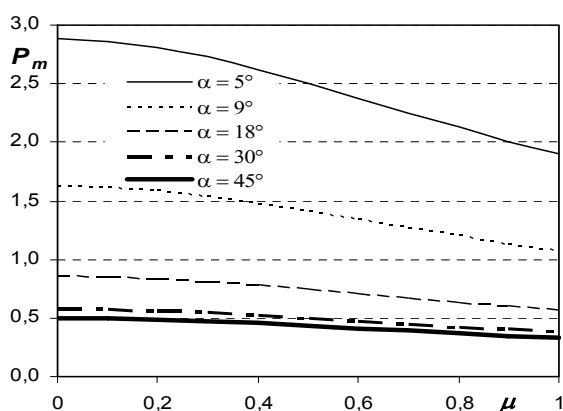


Рис. 3. Зависимость предельного напряжения  $p^*$  от коэффициента внутреннего трения  $\mu$  для различных углов ориентации трещины  $\alpha$  при отсутствии взаимодействия между берегами трещины ( $f = 0$ )

Рис. 3 иллюстрирует сделанный выше вывод о том, что при отсутствии взаимодействия между берегами трещины наиболее опасная трещина ориентирована под углом  $\alpha_0 = \pi/4$ , чему соответствует наименьшая предельная нагрузка  $p_m^*$ .

Из данных, приведенных на рис. 3, следует также, что для любого угла  $\alpha$  увеличение коэффициента внутреннего трения  $\mu$  вызывает рост чувствительности материала к наличию в нем трещины.

Для каждой из кривых найдем отношение

$$m = \frac{(p_m^*)_{\max}}{(p_m^*)_{\min}}. \quad (15)$$

В результате вычислений по формуле (15) оказывается, что отношение  $m$  постоянно для любого угла  $\alpha$  и равно 1,52.

На рис. 4 показаны зависимости  $p_m^*$  от угла  $\alpha$  для различных значений  $\mu$  при отсутствии взаимодействия между берегами трещины, т.е. при  $f = 0$ .

Симметричность кривых, изображенных на рис. 4, обусловлена отсутствием взаимодействия между берегами трещины. Минимальное значение  $p_m^*$  соответствует углу  $\alpha_0 = \pi/4$ , что иллюстрирует результат, полученный выше.

Из рис. 4 также следует, что чем больше значение коэффициента внутреннего трения  $\mu$ , тем меньше значение предельного напряжения  $p_m^*$ , что соответствует выводу о высокой чувствительности хрупких материалов к наличию в них трещин.

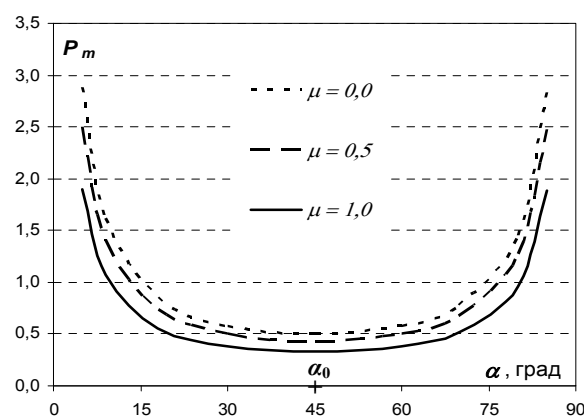


Рис. 4. Зависимость предельного напряжения  $p_m^*$  от угла ориентации трещины  $\alpha$  для различных значений коэффициента внутреннего трения  $\mu$  при отсутствии взаимодействия между берегами трещины ( $f = 0$ )

На рис. 5 приведена зависимость предельного напряжения  $p_m^*$  от угла приложения нагрузки  $\alpha$  при наличии взаимодействия между берегами, когда коэффициент трения скольжения  $f = 0,4$  и коэффициент внутреннего трения  $\mu = 0,5$ . Из анализа кривой

на рис. 5 можно сделать вывод об уменьшении значения угла  $\alpha_0$ , определяющего ориентацию наиболее опасной трещины в материале, с увеличением величины  $f$ . В частности, для данной кривой  $\alpha_0 = 34^\circ$ .

Из рис. 5 видно, что  $p_m^* \rightarrow \infty$  при некотором значении угла  $\alpha$ . Назовем этот угол критическим и обозначим  $\alpha_k$ . Угол  $\alpha_k$  – это угол  $\alpha$ , при котором знаменатель в выражении (11) обращается в ноль из-за равенства нулю разности функций, зависящих от угла  $\alpha$ . Т.е.,  $\alpha_k$  определяется из условия

$$(\sin \alpha_k \cos \alpha_k - f \sin^2 \alpha_k) = 0,$$

откуда

$$\alpha_k = \arctg \frac{1}{f}. \quad (16)$$

Сравнивая выражения (16) и (12) можно записать:

$$\alpha_k = 2\alpha_0.$$

Для случая, показанного на рис. 5, находим, что  $p_m^* \rightarrow \infty$  при  $\alpha_k = 68^\circ$ . Это означает, что при ориентации трещины в пластине под углом  $\alpha > \alpha_k$  пластина реагирует на эту трещину так же, как и на трещину, ориентированную под углом  $\alpha_k$ .

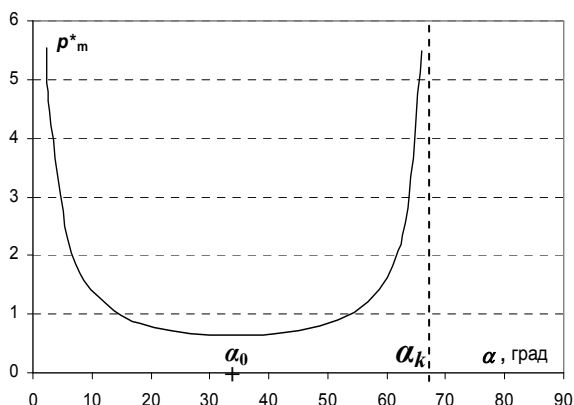


Рис. 5. Зависимость предельного напряжения  $p_m^*$  от угла ориентации трещины  $\alpha$  в случае взаимодействия между берегами трещины при  $f = 0,4$  и  $\mu = 0,5$

**Выводы.** В результате анализа напряженного состояния в вершине трещины при условии принятия гипотезы о том, что начальное распространение трещины происходит в плоскости, для которой эффективные касательные напряжения  $\tau$ , имеют максимальные значения, установлены зависимости:

- предельного сжимающего напряжения от коэффициента внутреннего трения и ориентации сжимающей нагрузки относительно начальной трещины;

- угла, определяющего направление развития начальной трещины, от коэффициента внутреннего трения материала;

- ориентации наиболее опасной трещины от условий контакта берегов трещины.

### Список литературы

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Предельные кривые разрушения трещиноватых горных пород при плоской деформации / Л.М. Васильев, А.В. Кононыхина, О.Н. Бычков, А.В. Родин // Интенсификация процессов разрушения горных пород: Сб. науч. тр. / ИГТМ АН Украинской ССР. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 48-52.
3. Локшина Л.Я. Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. трудов. – Д., 2009. – № 82. – С. 199-206.

Для гірських порід, що володіють природною тріщинуватістю й блоковою структурою, утвореною системами по-різному орієнтованих тріщин, характерне руйнування в результаті розвитку найнебезпечніших тріщин, які легко ініціюються за даних умов. У роботі розглядається завдання про граничну рівновагу пластини з макроскопічною тріщиною. Матеріал пластини підкоряється закону Гука аж до моменту руйнування. У результаті аналізу напруженого стану у вершині тріщини встановлено залежності: граничного стискаючого напруження від коефіцієнта внутрішнього тертя й орієнтації стискаючого навантаження щодо початкової тріщини; кута, що визначає напрямок розвитку початкової тріщини, від коефіцієнта внутрішнього тертя матеріалу; орієнтації найнебезпечнішої тріщини від умов контакту берегів тріщини.

**Ключові слова:** тріщинуватість, орієнтовані тріщини, граничне стискаюче напруження.

For mining breeds, possessing natural by plenty of cracks and sectional structure, formed by the systems different the oriented cracks characteristically destruction as a result of development of the most vulnerable cracks which easily arise up under the conditions. A task is in-process examined about the maximum equilibrium of plate with a macroscopic crack. Material of plate submits to the law of Hooke up to the moment of destruction. As a result of analysis of the tense state in the top of crack set to dependence: maximum squeezing tensions from the coefficient of internal friction and orientation of the squeezing loading in relation to an initial crack; corner determining direction of development of initial crack, from the coefficient of internal friction of material; orientations of the most vulnerable crack from the terms of contact of banks of crack.

**Key words:** fractures, oriented cracks, the ultimate compressive stress.

Рекомендовано до публікації д.т.н. С.П. Мінецьвим 02.02.10