

$$M_{23}^{\max} = 2 \frac{\theta_2}{C_{12}} \beta_{12}^2 M_{12}^0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} M_T - \frac{8T^2 DM_T}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\beta_{12}^2 - \beta_2^2}{\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2} - \frac{\beta_{12}^2 - \beta_1^2}{\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2} \right] +$$

$$+ \frac{2TDM_T}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2)^2} \times \quad (27)$$

$$\times \left\{ \pi^2 \left[\beta_1 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_1^2) - \beta_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) (\pi^2 - 4T^2 \beta_2^2) \right] - \right.$$

$$\left. - 8T^2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) \left(\beta_{12}^2 - \frac{\pi^2}{4T^2} \right) \right\},$$

Из (19) и (22), согласно (20), (21), (23) при $t = T$, получаем:

$$M_{12}(T) = M_{12}^0; M_{23}(T) = \frac{\theta_2 \beta_{12}^2}{C_{12}} M_{12}^0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1} M_T = M_{23}^0,$$

откуда видно, что решение уравнения (19) удовлетворяет условию (21).

Согласно [1]:

$$M_{12}(t) = C_{12} \cdot \varphi_{12}, \quad M_{23} = C_{23} \cdot \varphi_{23}, \quad (28)$$

получаем:

$$\varphi_{12}^{\max} = \frac{M_{12}^{\max}}{C_{12}}, \quad \varphi_{23}^{\max} = \frac{M_{23}^{\max}}{C_{23}}, \quad (29)$$

где M_{12}^{\max} и M_{23}^{\max} определяются соответственно из (13), (17), (24), (26), и (14), (25), (27).

По формуле $C_{i,i+1} = \frac{\sigma_i J_{Pi}}{\ell_i}$, ($i=1,2$), найдем полярный момент поперечного сечения вала, т. е.

$$J_{Pi} = \frac{\ell_i \cdot C_{i,i+1}}{\sigma_i}.$$

УДК 621.926.5

© Б.В. Виноградов, 2010

Б.В. Виноградов

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИВОДА БАРАБАННОЙ МЕЛЬНИЦЫ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

Наведена динамічна модель барабанного млина, обґрунтоване розділення її на парціальні системи. Барабан з продуктами завантаження розглянуто як фізичний маятник.

Представлена динамическая модель привода барабанной мельницы, обосновано разбиение её на парциальные системы. Барабан с продуктами загрузки рассмотрен как физический маятник

Presented dynamic model of the drum mill, substantiate partitioning per partial system. Drum with product of the loading is considered as physical pendulum.

Привод барабанной мельницы представляет собой сложную электромеханическую систему. При динамических расчётах, в зависимости от поставленной задачи, полную эквивалентную динамическую схему целесообразно разбивать на парциальные системы, выбор которых требует обоснования.

Если считать известными углы φ_{12} , φ_{23} – определяемые из (29), где ℓ_i – длина вала, σ_i – модуль сдвига, $C_{i,i+1}$ – жесткость определяем из (28) при заданных φ_{12} , φ_{23} [4, 5].

Заключение. Получены дифференциальные уравнения моментов сил упругости для заданных условий работы трехмассовой крутильной системы. Приведены выражения для определения экстремальных упругих моментов, а также учтены резонансные случаи. Определены углы скручивания вала, что имеет практическое значение для расчета предельной жесткости вала.

Список литературы

1. Кожевников С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во Акад. наук Украинской ССР, 1961. – 160 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д. Элементы прикладной математики – М.: Наука, 1967. – 646 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, ч. II. – М.: Высшая школа, 1971. – 476 с.
4. Иванова А.П. Исследование причин поломок деталей привода механизма подъема кранов и определение допустимой скорости двигателя при подхвате груза // Системні технології: Регіональний міжвуз. зб. наук. праць. – Д.: НМетАУ. – 2005. – № 3(38). – С. 46-52.
5. Иванова А.П., Штыцко П.И. Совершенствование приводного механизма рабочей клетки станок ХПТ // Системні технології: Регіональний міжвуз. зб. наук. праць. – Д.: НМетАУ. – 2008. – № 5(58). – С. 50-56.

Рекомендовано до публікації д.т.н. О.М. Шашенком 24.11.09

ность динамической схемы не рассматривалась. Поэтому целью данной статьи является выбор и обоснование парциальных систем, а также установление влияния физического маятника на частоту собственных колебаний.

Эквивалентную динамическую схему привода барабанной мельницы. представим на рис. 1, где I_p , I_1' , I_1 , I_2 , I_3 , I_6 – приведенные моменты инерции соответственно ротора двигателя, правой и левой полушестерней, шестерни открытой зубчатой передачи, зубчатого колеса вспомогательного привода и барабана мельницы; $c_{об}$, c_p , c_M , c_1 , c_2 , – приведенные крутильные жесткости соответственно электромагнитной упругой связи двигателя, вала ротора, упругой муфты, правого и левого участков вал-шестерни.

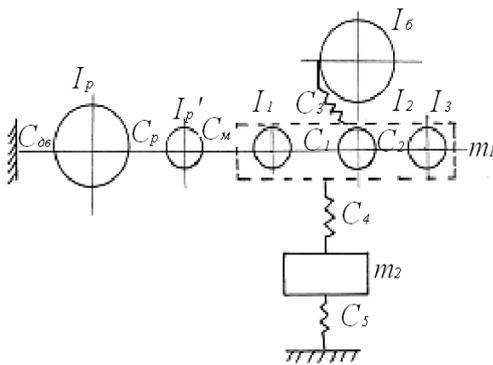


Рис. 1. Эквивалентная динамическая схема привода барабанной мельницы

Приводной узел шестерни, включающий вал-шестерню с полушестерней, зубчатое колесо вспомогательного привода, подшипниковый узел с

$$\begin{vmatrix}
 c_p + c_p - I_p k^2 & -c_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -c_p & c_p + c_M - I_p k^2 & -c_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -c_M & c_M + c_1 - I_1 k^2 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & c_1 + r^2 c_3 + c_2 - I_2 k^2 & -c_2 & -r^2 c_3 & r c_3 \cos \alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -r^2 c_3 & 0 & r^2 c_3 - I_3 k^2 & -r c_3 \cos \alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 c_3 & 0 & -r^2 c_3 & c_4 + r c_3 \cos \alpha - m_1 k^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 \\
 & & & & & & & c_4 + c_5 - m_2 k^2
 \end{vmatrix} = 0$$

Значение моментов инерции, масс и жесткостей некоторых мельниц приведены в табл. 1-2, а расчетные значения собственных частот колебаний в табл. 3.

Анализ полной динамической схемы барабанной мельницы показывает, что при исследовании высокочастотных колебаний, которые возникают в зубчатом зацеплении и в узле приводной шестерни можно ограничиться рассмотрением парциальных систем. Так, в связи с тем, что масса верхней плиты рамного фундамента m_2 на порядок больше массы корпуса

фундаментной плитой, может совершать поперечные колебания. В соответствии с этим на рис. 1. обозначено: m_1 – приведенная масса вал-шестерни с полумуфтой и шестерней вспомогательного привода; m_2 – масса подшипникового узла с фундаментной плитой; c_3 , c_4 – линейные жесткости открытой зубчатой передачи и опор вал-шестерни соответственно; c_5 – жесткость прокладок, установленных между фундаментной плитой подшипникового узла и верхней плитой рамного фундамента.

Для определения частот собственных колебаний составим дифференциальные уравнения свободных колебаний:

$$\left. \begin{aligned}
 I_p \ddot{\varphi}_p + c_{об} \varphi_p + c_p (\varphi_p - \varphi_1') &= 0; \\
 I_1' \ddot{\varphi}_1' - c_p (\varphi_p - \varphi_1') + c_M (\varphi_1' - \varphi_1) &= 0; \\
 I_1 \ddot{\varphi}_1 - c_M (\varphi_1' - \varphi_1) + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\
 I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + r c_3 [x_1 \cos \alpha + r (\varphi_2 - \varphi_6)] + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\
 I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\
 I_4 \ddot{\varphi}_6 - r c_3 [x_1 \cos \alpha + r (\varphi_2 - \varphi_6)] &= 0; \\
 m_1 \ddot{x}_1 + r c_3 [x_1 \cos \alpha + r (\varphi_2 - \varphi_6)] \times \\
 \times \cos \alpha + c_4 (x_1 - x_2) &= 0; \\
 m_2 \ddot{x}_2 - c_4 (x_1 - x_2) + c_5 x_2 &= 0,
 \end{aligned} \right\}$$

где φ_i , x_i – крутильные и линейные перемещения соответствующих масс; r – радиус приводной шестерни; α – угол между линией зацепления и вертикалью.

Значения моментов инерции, масс и жесткостей некоторых мельниц приведены в табл. 1, 2. В табл. 3 даны расчетные значения собственных частот колебаний.

Уравнения частот имеют вид

подшипников шестерни m_1 , можно считать ее бесконечно большой и, поэтому, частоты собственных колебаний этих масс можно определить отдельно. Крутильные жесткости c_1 , c_2 на два порядка меньше, чем жесткости зубчатого зацепления $c_3 r^2$, а момент инерции барабана I_6 значительно больше чем момент инерции шестерни I_2 и всех приведенных к ней масс. Это позволяет сложную динамическую схему привода мельницы подать в виде отдельных парциальных систем (табл. 4).

Приведенные значения моментов инерции и масс барабанных мельниц

Тип мельницы	Моменты инерции, кг·м ²						Массы, кг	
	Ротор двигателя, I_p	Полумуфта правая, I_1	Полумуфта левая, I_1	Шестерня главного привода, I_2	Шестерня вспомогательного привода, I_3	Барабан, I_4	Вал-шестерня с присоединенными массами, m_1	Фундаментная плита, m_2
МРГ-5500x7500	19300	300	300	160	960	30500	9200	12300
МШЦ-5500x6500	30000	520	520	1600	960	105617	13480	12300
МШЦ-5500x6500М	22300	360	360	281	410	26400	10740	12300

Таблиця 2

Приведенные жесткости упругих связей эквивалентной динамической схемы барабанной мельницы

Тип мельницы	Крутильные жесткости упругих связей вращающихся масс, Н·м				Линейные жесткости масс, которые движутся поступательно, Н/м			
	электромагнитное поле двигателя, $c_{дв} \cdot 10^9$	Вал ротора, $c_p \cdot 10^9$	Упругая муфта, $c_M \cdot 10^9$	Правый участок вала шестерни, $c_1 \cdot 10^9$	Левый участок вала шестерни, $c_2 \cdot 10^9$	Зубчатое зацепление, $c_3 \cdot 10^9$	Опора вал-шестерни, $c_4 \cdot 10^9$	Фундамент, $c_5 \cdot 10^9$
МРГ-5500x7500	0,012	0,030	0,0015	0,030	0,030	13	6	170
МШЦ-5500x6500	0,058	0,038	0,015	0,038	0,038	13	6	170
МШЦ-5500x6500М	0,015	0,030	0,015	0,03	0,030	13	7	170

Таблиця 3

Расчетные значения собственных частот колебаний привода мельницы МРГ – 5500x7500

Эквивалентная динамическая схема	Круговые частоты собственных колебаний							
	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8
Полная динамическая схема привода мельницы (рис. 1)	6,2	26,2	170	310	580	790	2970	3750

Низкочастотные колебания привода определяются рассмотрением двухмассовой системой (рис. 2), где J_1 , J_2 приведенные моменты инерции ротора и барабана с продуктами загрузки; C_{01} , C_{12} – электромагнитная крутильная жесткость синхронного двигателя и механических передач соответственно.

На рис. 2 полупрямые, выходящие из точки привеса O обозначают соответственно: I – вертикаль; II – положение маятника при ненагруженной упругой связи C_{12} ; III – положение статического равновесия; IV – произвольное положение. Кроме того, G – вес маятника $OC = l$ – длина отрезка, соединяющего точку привеса с центром масс C .

Для данной механической системы составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; φ_1 , φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ – обобщенные координаты и скорости масс системы; Q_1 , Q_2 – обобщенные силы.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}.$$

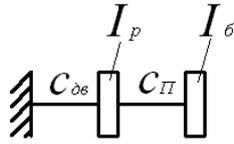
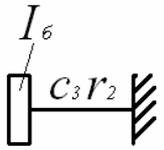
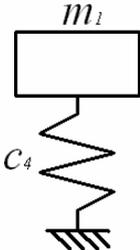
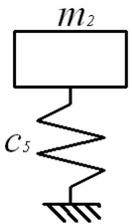
Обобщенные силы

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}; \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2},$$

где Π – потенциальная энергия системы, которая складывается из потенциальной энергии упругих связей $\Pi_{упр}$ и потенциальной энергии веса продуктов загрузки барабана $\Pi_{вес}$.

Таблиця 4

Разделение полной эквивалентной динамической системы на парциальные системы

Расчётные схемы	Обозначение	Круговые частоты собственных колебаний, с ⁻¹					
		МРГ-55×75		МЩЦ-55×65		МЩЦ-55×65М	
		приближенные	точные	приближенные	точные	приближенные	точные
	κ ₁	6,4	6,2	3,9	3,5	6,8	6,7
	κ ₂	26,4	26,2	44,5	44,2	27,1	26,9
	κ ₇	2830	2920	1639	1830	2383	2520
	κ ₆	807	790	679	610	738	710
	κ ₈	3718	3750	3718	3780	3718	3780

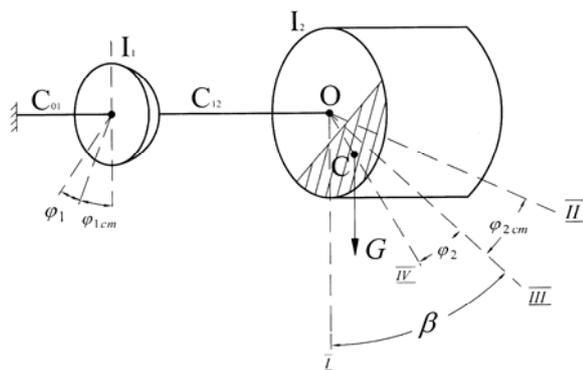


Рис. 2. Эквивалентная динамическая схема привода барабанной мельницы

Потенциальная энергия сил упругости

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{упр}} = & - \int_{\varphi_1} C_{01} (\varphi_{1cm} + \varphi_1) d\varphi_1 - \int_{\alpha_{21}} C_{12} (\alpha_{21cm} + \alpha_{21}) d\alpha_{21} = \\ & \left(C_{01} \varphi_{1cm} \varphi_1 + C_{01} \frac{\varphi_1^2}{2} \right) + C_{12} \alpha_{21cm} \alpha_{21} + C_{12} \frac{\alpha_{21}^2}{2} \end{aligned}$$

где α_{21cm} , $\alpha_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$ – закручивание упругой связи в положении статического равновесия и в произвольный момент времени.

Потенциальная энергия веса, приведенная к валу ротора

$$\Pi_{\text{вес}} = - \frac{Gl}{u} [\cos(\beta - \varphi_2) - \cos \beta],$$

где u – передаточное число.

Разложим тригонометрические функции и ограничимся малыми второго порядка, тогда

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{вес}} = & \frac{Gl}{u} \left[\cos \beta - \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right) \cos \beta - \varphi_2 \sin \beta \right] = \\ = & \frac{Gl}{u} \frac{\varphi_2^2}{2} \cos \beta - \frac{Gl}{u} \varphi_2 \sin \beta \end{aligned}$$

Учитывая, что $\Pi = \Pi_{\text{упр}} + \Pi_{\text{вес}}$,

$$C_{01} \varphi_{1cm} - C_{12} \alpha_{21cm} = 0, \quad C_{12} \alpha_{21cm} - \frac{Gl}{u} \sin \beta = 0 \quad \text{определим обобщенные силы:}$$

$$\begin{aligned} -Q_1 &= C_{01}\varphi_1 - C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ -Q_2 &= C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \left(\frac{Gl}{u} \cos \beta\right)\varphi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Остальные члены уравнения Лагранжа равны

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= J_1 \ddot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= J_2 \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя значения (2), (3) в уравнение (1), получим дифференциальные уравнения собственных колебаний:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_{01}\varphi_1 - C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \left(\frac{Gl}{u} \cos \beta\right)\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Соответственно системе дифференциальных уравнений (5) квадрат частоты собственных колебаний определяется выражением:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{C_{01} + C_{12}}{J_1} + \frac{C_{12} + C_G}{J_2} \right) \mp \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{C_{01} + C_{12}}{J_1} + \frac{C_{12} + C_G}{J_2} \right)^2 - \left(\frac{C_{01} + C_{12}}{J_1} \cdot \frac{C_{12} + C_G}{J_2} - \frac{C_{12}^2}{J_1 J_2} \right)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $C_G = \frac{Gl}{u} \cos \beta$

Из уравнения частот (6) видим, что влияние физического маятника на частоту собственных колебаний можно учесть введением приведенной жесткости $C_{12П}$, равной

$$C_{12П} = C_{12} + \frac{Gl}{u} \cos \beta \quad (7)$$

Поскольку $\varphi_2 \ll \beta$, можно считать, что $\beta \cong \beta_H$, где β_H – угол определяющий положение продуктов загрузки в установившемся режиме работы. Тогда номинальный момент двигателя равен

$$M_H = \frac{Gl}{u} \sin \beta, \quad \frac{Gl}{u} \cos \beta = M_H \operatorname{ctg} \beta$$

Влияние физического маятника на величину приведенной жесткости демонстрирует табл. 5.

Таблица 5

Расчетные значения приведенной жесткости

№ п/п	Тип мельницы	Жесткость механических передач $C_{12}, Нм$	Величина $\frac{Gl}{u} \cos \beta, Нм$	Приведенная жесткость $C_{12П}, Нм$
1	МРГ – 55×75	$7,5 \cdot 10^6$	$(20 - 35) \cdot 10^4$	$20 \cdot 10^6$
2	МШЦ – 55×65М	$7,5 \cdot 10^6$	$(26 - 45) \cdot 10^4$	$7,5 \cdot 10^6$
3	МШЦ – 55×65	$14,6 \cdot 10^6$	$(51 - 88) \cdot 10^4$	$14,6 \cdot 10^6$
4	ММС – 70×23*	$58,1 \cdot 10^3$	$(15,3 - 26,5) \cdot 10^3$	$(73,4 - 84,6) \cdot 10^3$

* – редукторный привод

Выводы

Проведенный анализ позволяет заключить, что при рассмотрении динамики приводного узла открытой зубчатой передачи из полной динамической схемы можно выделить простые парциальные системы. При исследовании низкочастотных колебаний эквивалентную динамическую схему привода барабанной мельницы можно представить в виде двухмассовой системы, где крутильная жесткость механических передач определяется по формуле (7).

Наиболее полно электромагнитные процессы в синхронном двигателе описываются полными уравнениями Парка-Горева [1]. В этом случае эквивалентную динамическую схему можно представить в

виде двух масс, где $M_{эм}(t)$ – электромагнитный момент синхронного двигателя, приложенный к ротору, а M_C – момент сопротивления, приложенный к барабану.

Из табл. 5 следует, что для приводов, привод которых содержит только зубчатую передачу, влиянием физического маятника можно пренебречь.

Список литературы

1. Виноградов Б.В. Динаміка барабанних млинів / Б.В. Виноградов. – Д.: УДХТУ, 2004. – 127 с.

Рекомендовано до публікації д.т.н. В.П. Франчуком 11.01.10