

но заходи зі зниження екологічного навантаження на гірничодобувні регіони.

**Ключові слова:** газифікація, когенераційна технологія, парниковий ефект, вугільний пласт

Possibilities of diaphragm installations application for depuration of underground coal gasification products by the method of filtration are substantiated. Application of modern diaphragm gas separator allows dissociating main ballast gases ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{S}$  i  $\text{N}_2$ ) from combustible gases appearing in the process of under-

ground coal gasification. The structural characteristics of implementation of the mentioned options and technology of power gas depuration are resulted. Measures reducing environment pollution load in mining regions are offered.

**Keywords:** gasification, cogeneration technology, greenhouse effect, coal seam

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.І. Бузилом. Дата надходження рукопису 11.02.11

УДК 624.041

О.О. Ткач, канд. техн. наук

Державний вищий навчальний заклад „Національний гірничий університет“, м. Дніпропетровськ, Україна  
e-mail: mgstkach@ukr.net

## ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ПРО ЗУСИЛЛЯ В БАЛКАХ

О.О. Tkach, Cand. Sci. (Tech.)

State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnipropetrovsk, Ukraine  
e-mail: mgstkach@ukr.net

## CERTAIN PROBLEMS CONCERNING INTERNAL FORCES IN BEAMS

Знайдено аналітичний розв’язок задачі про опорні реакції нерозрізних багатопрогонових балок, що завантажені рухомою групою сил. Запропоновано узагальнену розрахункову схему, яка дозволяє будь-яку балку після складання функцій опорних реакцій подати як консольну, і спеціальні функції розподілу вздовж балки внутрішніх зусиль від рухомої групи сил. Ортогональні до осей координат перерізи поверхневих графіків цих функцій є лініями впливу й епюрами внутрішніх зусиль. Показано також можливість застосування інших плоских перерізів поверхневих графіків для пошуку максимальних внутрішніх зусиль у нормальних перерізах балок.

**Ключові слова:** балки, епюри, лінії впливу, внутрішні зусилля, пошук максимуму, програмування

**Вступ.** Кожна науково-технічна теорія несе відбиток не тільки природних явищ і процесів, які вона описує, але й обчислювальних методів, що були поширені на час її становлення. Тому корисно час від часу переглядати існуючі теорії з метою пристосування їх до нових можливостей обчислювальної техніки і математичного забезпечення. У цій статті зроблена спроба переглянути з таких позицій задачі будівельної механіки про внутрішні зусилля в балках, керуючись принципом „від елементарного до складного, від складного до найскладнішого“, що є ефективним у програмуванні.

Оскільки балкові конструкції залишаються дуже поширеними в різних областях будівництва, можна сподіватися, що результати цієї роботи знайдуть застосування у відповідних обчислювальних програмах.

**Аналіз стану проблеми.** Усі більш-менш складні розрахунки будівельних конструкцій тепер виконують за допомогою комп’ютерних програм, що переважно, засновані на методі скінченних елементів. Але, як і всі чисельні методи, цей метод не підходить для аналітичного розв’язання задач.

Метод сил у вигляді рівнянь трьох моментів [1; с. 241–244], що до поширення комп’ютерних технологій використовувався для розрахунку нерозрізних балок, є також орієнтованим на чисельні результати.

Ще й досі послуговуються рівняннями трьох моментів, якщо недоступні програми типу SCAD або LIRA, але аналітичні [2; стб. 716] розв’язки рівнянь трьох моментів одержані лише для окремих випадків. Наприклад, у [3; с. 240] запропоновано аналітичний розв’язок задачі про згинальні моменти в нерозрізній балці з рівними прогонами, що завантажена зосередженим моментом сил на одному з кінців.

Для застосування результатів окремих елементарних обчислень у розв’язанні складніших задач часто користуються принципом незалежності дії сил [3; с. 28, 29]. Так, за допомогою цього принципу і функції згинальних моментів, що є розв’язком вищезгаданої задачі, можна записати функцію згинальних моментів у нерозрізній балці, що завантажена різними зосередженими моментами на обох своїх кінцях. Нажаль, подальші узагальнення аналітичного розв’язання задачі [3; с. 240] неможливі.

Назвемо *функцією внутрішнього зусилля* (згинального моменту або поперечної сили) функцію двох аргументів, один з яких задає розташування зовнішніх сил, а другий – перерізу, в якому визначається внутрішнє зусилля. Найпростіше складати функції зусиль для консольної балки. Цей окремий випадок не вимагає попереднього обчислення опорних реакцій. Можна записати функції внутрішніх зусиль для окремої одиничної зосередженої сили, що рухається

вздовж консольної балки, і, далі, керуючись принципом незалежності дії сил, записати функції зусиль від рухомої групи довільних сил як лінійні комбінації вищеназваних функцій зі зсунутими аргументами (див. далі). Але більшість балок, які застосовують у будівлях і спорудах, є прогоновими, а не консольними, і для них неможливо скласти функції внутрішніх зусиль за вищенаведеною схемою.

Якщо в прогоновій балці крім вертикальних опор є ще й защемлення одного з її кінців, то після визначення опорних реакцій таку балку теж можна розглядати як консольну. А якщо записати реакції в опорах як функції координати рухомої одиничної сили і скористатися принципом незалежності дії сил, то можна і для цієї балки скласти функції зусиль від групи сил як лінійні комбінації функцій зусиль від одиничної сили зі зсунутими аргументами та відповідних функцій опорних реакцій. Але прогонові балки із защемленням одного з кінців застосовують у будівлях і спорудах не частіше консольних.

**Мета роботи.** Знайти аналітичний розв'язок задачі про опорні реакції нерозрізної багатопрогової балки загального вигляду, що завантажена групою зосереджених сил, скласти для неї функції внутріш-

ніх зусиль і скористатися ними для побудови епюр, ліній впливу та інших кривих і поверхонь, що характеризують розподіл внутрішніх зусиль уздовж балки.

Мета досягається розв'язанням двох задач. *Перша задача* – знайти функції опорних реакцій довільної балки від рухомої одиничної сили. *Друга задача* – запропонувати таку розрахункову схему балок, щоб функції зусиль від довільного навантаження можна було складати з найпростіших функцій, якими є функції зусиль від окремо взятої одиничної сили і від окремо взятої реакції опори, як у випадку консольної балки або прогонової балки із защемленням одного з кінців після визначення реакцій опор.

Розподілене навантаження на балки у переважній більшості практичних випадків є нерухомим. Рівняння трьох моментів дають для нього вичерпні результати і не потребують перегляду.

**Розв'язання першої задачі.** Знайдемо функції опорних реакцій  $r_i = r_i(x)$  від одиничної сили, де  $i = 1, \dots, n$ , а  $x$  – координата точки прикладення одиничної сили, що відрахована від початку координатної осі на крайній лівій опорі (рис. 1). Назвемо координату  $x$  глобальною. На рис. 1 показано додатний напрямок сили.

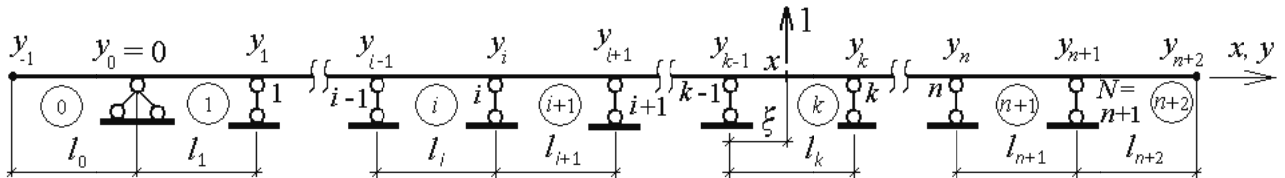


Рис. 1. Відома розрахункова схема нерозрізної балки

Знайдемо спочатку рішення першої задачі для місцевої координати  $\xi$  (рис. 1). Літерою „ $k$ “ позначено прогін, в якому на даний момент перебуває рухома одинична сила.

Згідно методу сил, від початкової розрахункової схеми, що на рис. 1, слід перейти до основної розрахункової схеми, яка може бути одержана із початкової, влаштуванням умовних шарнірів над проміжними опорами і заміною відкинутих за цієї операції зв'язок їх невідомими реакціями, які позначимо  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Для визначення цих реакцій скористаємося матричною формою рівняння трьох моментів

$$F \cdot X = C, \tag{1}$$

де  $X$  – матриця-стовпець, елементами якої є невідомі реакції-моменти  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ );  $F$  – матриця піддатливості;  $C$  – матриця-стовпець вантажних (або вільних) членів.

Елементи матриці піддатливості  $f_{i,j}$  ( $i = 1..n$ ,  $j = 1..n$ ) знаходять за допомогою інтегралів Мора [3; с. 227]. За наближеними формулами, що враховують тільки вплив згинальних моментів, вони дорівнюють

$$f_{i,i-1} = \frac{\alpha_i}{6}; f_{i,i} = \frac{1}{3} \cdot (\alpha_i + \alpha_{i+1}); f_{i,i+1} = \frac{\alpha_{i+1}}{6}, \tag{2}$$

де  $\alpha_i = l_i / EJ_i$  – піддатливість  $i$ -го прогону балки;  $EJ_i$  – його погонна жорсткість. У всіх інших випадках  $f_{i,j} = 0$ .

За уточненими формулами, що враховують як згинальні моменти, так і поперечні сили, відмінні від нуля дорівнюють

$$\begin{aligned} f_{i,i-1} &= \alpha_i \cdot \left( \frac{1}{6} - 2\lambda_i \right); \\ f_{i,i} &= \alpha_i \cdot \left( \frac{1}{3} + 2\lambda_i \right) + \alpha_{i+1} \cdot \left( \frac{1}{3} + 2\lambda_{i+1} \right); \\ f_{i,i+1} &= \alpha_{i+1} \cdot \left( \frac{1}{6} - 2\lambda_{i+1} \right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{де } \lambda_i = \frac{k_{y,i} \cdot (1 + \mu_i)}{\eta_i \cdot l_i^2}; \quad \eta_i = \frac{A_i}{J_i};$$

$A_i$  – площа перерізу;  $k_{Y,i}$  – коефіцієнт форми перерізу [3; с. 192];  $\mu_i$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу для  $i$ -го прогону.

Елементи матриці-стовпця  $C$  (вантажні або вільні члени) теж знаходять за допомогою інтегралів Мора

$$c_i = \int_l \frac{M_{X,i} \cdot M_{X,P}}{EJ_{X,i}} dz + \int_l \frac{k_{Y,i} \cdot Q_{Y,i} \cdot Q_{Y,P}}{GA_i} dz, \quad (4)$$

де  $M_{X,i} = M_{X,i}(z)$  і  $Q_{Y,i} = Q_{Y,i}(z)$  – епюри згинальних моментів і поперечних сил від дії одиничного моменту в  $i$ -й відкинутій зв'язці над  $i$ -ю опорою;  $M_{X,P} = M_{X,P}(z, \xi, k)$  і  $Q_{Y,P} = Q_{Y,P}(z, \xi, k)$  – епюри згинальних моментів і поперечних сил від дії зовнішнього навантаження, тобто від одиничної рухомої сили, що перебуває в  $k$ -му прогоні на відстані  $\xi$  від  $(k-1)$ -ї опори. За наближених обчислень (як правило, саме їх застосовують на практиці) у правій частині формули (4) залишають лише перший доданок. Із вигляду формули (4) випливає, що вільні члени  $c_i$  є

$$c_i(k, \xi) = \frac{\alpha_i(l_0 - \xi)}{6} \cdot \delta(k, 0) \cdot \delta(i, 1) - \frac{\xi(l_k - \xi)}{6 \cdot l_k^2} \alpha_k \cdot [(2l_k - \xi) \cdot \delta(k, i+1) + (l_k + \xi) \cdot \delta(k, i)] + \frac{\alpha_{n+1} \xi}{6} \times \delta(k, n+2) \cdot \delta(i, n), \quad (6)$$

де  $k = 0, \dots, (n+2)$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $n \geq 1$ ;

$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x=y, \\ 0, & \text{якщо } x \neq y \end{cases}$  – дельта-функція Кронекера,

яка може бути виражена через функцію Хевісайда

$$\delta(x, y) = H_-(x-y) \cdot H_-(y-x)$$

або

$$\delta(x, y) = H_-(x-y) - H_+(x-y).$$

Функція Хевісайда в загальному вигляді може бути зображена так

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z > 0; \\ \theta, & \text{якщо } z = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 1); \\ 0, & \text{якщо } z < 0. \end{cases}$$

Зокрема, якщо  $\theta=1$ , то  $H(z)$  позначають як  $H_-(z)$ , і, якщо  $\theta=0$ , то – як  $H_+(z)$ .

За уточненими формулами в усіх випадках, коли одинична сила не перебуває на консолях, поправки, що враховують поперечну силу, дорівнюють нулю:  $c_{Q,k-1} = c_{Q,k} = 0$ . Якщо ж одинична сила перебуває на одній з консолей, то відмінні від нуля поправки дорівнюють для лівої і правої консолей відповідно

$$\begin{aligned} c_{Q,0} &= -2 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot (l_0 - \xi); \\ c_{Q,n+2} &= -2 \cdot \alpha_{n+1} \cdot \lambda_{n+1} \cdot (l_{n+1} + \xi). \end{aligned} \quad (7)$$

функціями двох аргументів  $k$  і  $\xi$ :  $c_i = c_i(\xi, k)$ . Усі елементи  $c_i$ , крім деяких, дорівнюють нулю. Окремі елементи, що відмінні від нуля, за наближеними формулами (які враховують тільки вплив згинальних моментів на переміщення) мають вигляд функцій

$$c_1(0, \xi) = \frac{1}{6} \alpha_1 (l_0 - \xi), \text{ якщо } k=0;$$

$$c_{k-1}(k, \xi) = -\frac{1}{6} \alpha_k \frac{\xi(l_k - \xi)}{l_k^2} (2l_k - \xi),$$

якщо  $k=2..(n+1)$ ;

$$c_k(k, \xi) = -\frac{1}{6} \alpha_k \frac{\xi(l_k - \xi)}{l_k^2} \cdot (l_k + \xi),$$

якщо  $k=1, \dots, n$ ;

$$c_n(n+2, \xi) = \frac{1}{6} \alpha_{n+1} \xi, \text{ якщо } k=n+2. \quad (5)$$

Усі формули (5) можна звести до однієї, якщо скористатися дельта-функцією Кронекера

Рішення матричного рівняння (1) має вигляд

$$X = F^{-1} \cdot C. \quad (8)$$

Формула (8), з урахуванням (2), (3), (5), ..., (7), означає реакції відкинутих зв'язок як функції двох аргументів  $k$  і  $\xi$ :  $X_i = X_i(k, \xi)$ . Тепер можна скласти функції реакцій опор, поки що теж для місцевої координати

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{X_{i-1} - X_i}{l_i} + \frac{X_{i+1} - X_i}{l_{i+1}} + \varphi_0 \delta(i, 0) + \varphi_1 \delta(i, 1) + \\ &+ \psi H_-(i-2) H_-(n-1-i) + \varphi_n \delta(i, n) + \\ &+ \varphi_{n+1} \delta(i, n+1), \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\varphi_0 = -\left( \frac{l_0 + l_1 - \xi}{l_1} \delta_K(k, 0) + \frac{l_1 - \xi}{l_1} \delta_K(k, 1) \right);$$

$$\varphi_1 = \frac{l_0 - \xi}{l_1} \delta(k, 0) - \frac{\xi}{l_1} \delta(k, 1) - \frac{l_2 - \xi}{l_2} \delta(k, 2);$$

$$\psi = -\left( \frac{\xi}{l_i} \delta_K(k, i) + \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}} \delta_K(k, i+1) \right);$$

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\xi}{l_{n+1}} \delta_K(k, n+2) - \frac{\xi}{l_n} \delta_K(k, n) - \\ &- \frac{l_{n+1} - \xi}{l_{n+1}} \delta_K(k, n+1); \end{aligned}$$

$$\varphi_{n+1} = - \left( \frac{\xi}{l_{n+1}} \delta_K(k, n+1) + \frac{l_{n+1} + \xi}{l_{n+1}} \delta_K(k, n+2) \right).$$

Для безконсольної балки з рівними прогонами формули (6) і (9) суттєво спростяться і матимуть вигляд

$$c_i = c_i(k, \xi) = \frac{\xi(l - \xi)}{l^2} \cdot [(l + \xi)\delta_K(k, i) + (2l - \xi)\delta_K(k, i + 1)];$$

$$r_i = \frac{1}{l} [X_{i-1}(k, \xi) - 2X_i(k, \xi) + X_{i+1}(k, \xi)] - \frac{\xi}{l} \delta_K(k, i) - \frac{l - \xi}{l} \delta_K(k, i + 1).$$

Щоб одержати розв'язок задачі для глобальної координати  $x$ , потрібно аргументи функцій  $r_i$  записати як функції координати  $x$ :  $k = k(x)$ ,  $\xi = \xi(x)$ . Для цього введемо спеціальну функцію, яку назовемо *функцією ідентифікації відрізка за точкою, що йому належить*

$$I(x, V) = n_1 + \sum_{i=n_1}^{n_2} H_-(x - v_i), \quad (10)$$

де  $V = [v_{n_1}, v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_i, \dots, v_{n_2}]$  – вектор координат деяких точок, що лежать на осі  $x$ ;  $v_{n_1} \leq x \leq v_{n_2}$ .

Використовуючи функцію ідентифікації (10), можна знайти номер прогону, в якому перебуває одинична сила, як функцію від  $x$

$$k = k(x) = I(x, Y), \quad (11)$$

де  $Y = [y_{-1}, y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_{n+2}]$  – вектор координат опор і кінцевих точок балки.

Тоді місцеву координату можна виразити через глобальну

$$\xi = \xi(x) = x - y_{k(x)-1}, \quad (12)$$

де  $k(x)$  визначається формулою (11).

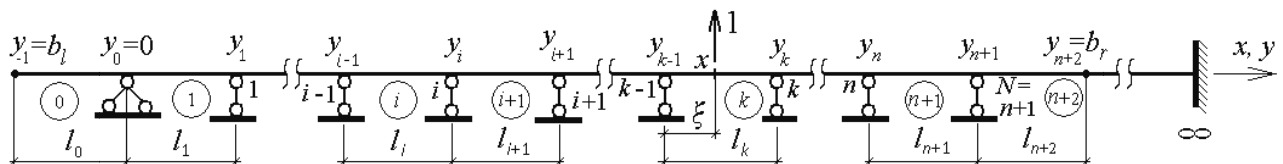


Рис. 2. Нова розрахункова схема нерозрізної балки загального вигляду

Будемо називати *активною елементарною функцією* певного зусилля (поперечної сили або згинального моменту) – функцію, яка задає величину цього зусилля в перерізі з координатою  $y$  від одиничної сили, що прикладена в точці з координатою  $x$  без урахування відповідних реакцій опор. Активну елементарну функцію поперечної сили позначимо як  $q^e$ , а

згинального моменту –  $m^e$ . Можна показати, що вони матимуть такий вигляд

$$q^e(x, y) = H(y - x); \quad (13)$$

$$m^e(x, y) = (y - x) \cdot H(y - x). \quad (14)$$

Формули (8), (9), (11), (12) дають рішення першої задачі.  
Для статично визначених балок з двома консолями (рис. 1,  $n=0$ ), як окремий випадок (9), з урахуванням (11), (12) або безпосередньо з умов рівноваги можна одержати реакції опор від рухомої одиничної сили за формулами

$$r_0(x) = - \frac{y_1 - x}{y_1 - y_0}; \quad r_1(x) = \frac{y_0 - x}{y_1 - y_0}.$$

**Розв'язання другої задачі.** Узагальнену розрахункову схему, що охоплює всі типи балок, крім балок із защемленням одного або двох кінців, наведено на рис. 2. Від звичайної розрахункової схеми, що на рис. 1, її відрізняє умовний прогін нескінченної довжини: від точки  $b_r$  до защемлення у нескінченності. Ділянку  $[b_l, b_r]$  далі називатимемо *дійсною балкою* або *дійсною ділянкою*, ділянку  $[b_r, \infty]$  – *уявною ділянкою* або *уявним прогоном*, ділянку  $[b_l, \infty]$  – *уявною консолюю*. Погонні жорсткості уявного прогону вважатимемо скінченними, наприклад, такими, як у сусідньої консолі дійсної балки. Оскільки погонні жорсткості уявної ділянки є скінченними, а довжина нескінченною, то її жорсткості на вигинання та інші види деформацій будуть нульовими. Звідси виходить, що уявна ділянка та защемлення її у нескінченності не впливають на напружено-деформований стан дійсної балки. Таким чином, узагальнена схема в межах дійсної балки еквівалентна звичайній, що на рис. 1.

Для балок із защемленням кінців, як відзначалося, достатньо звичайної розрахункової схеми, щоб скласти функції зусиль за принципом „від елементарного до складного ...“.

Якщо знайти функції опорних реакцій за формулами (9), (11), (12) і замінити опори їх реакціями в межах дійсної ділянки, то розрахункова схема будь-якої балки перетвориться на розрахункову схему нескінченної консолі (рис. 3).

Запишемо функції зусиль для окремо взятої одиничної сили. Обмежимося лише двома зусиллями: поперечними силами і згинальними моментами.

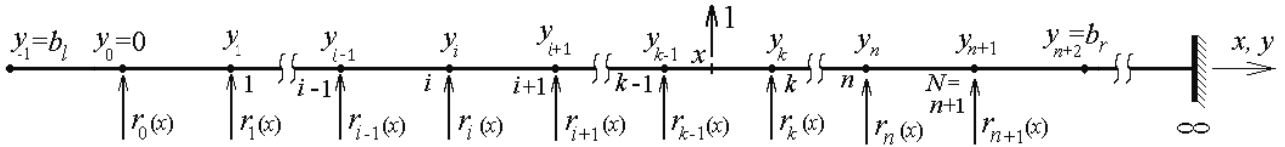


Рис. 3. Нова розрахункова схема нерозрізної балки загального вигляду з реакціями (замість опор), що спрямовані разом з одиничною силою в додатному напрямку

Природно вважати, що, коли одинична сила перебуває за межами дійсної балки ( $x \notin [b_l, b_r]$ ), зусилля в будь-якому її перерізі має дорівнювати нулю, і, де б не перебувала одинична сила, зусилля в перерізах, що не належать дійсній балці ( $y \notin [b_l, b_r]$ ), теж мають дорівнювати нулю. Щоб забезпечити ці вимоги, складемо на основі функції Хевісайда ще одну спеціальну функцію, яку назовемо *функцією границь*

$$b(x, b_l, b_r) = H(x - b_l) \cdot H(b_r - x),$$

де  $b_l$  – ліва, а  $b_r$  – права границі функції  $b$ , за якими вона тотожно дорівнює нулю, а між ними – одиниці.

Тепер функції (13), (14) можна переписати з урахуванням границь

$$q^e(x, y) = H(y - x) \cdot b(x, b_l, b_r) \cdot b(y, b_l, b_r), \quad (15)$$

$$m^e(x, y) = (y - x) \cdot H(y - x) \times b(x, b_l, b_r) \cdot b(y, b_l, b_r). \quad (16)$$

Якщо в активній елементарній функції поперечної сили (15) зафіксувати координату  $x$ , то для уявної консолі, що завантажена одиничною силою, одержимо епюру, а якщо зафіксувати  $y$ , то – лінію впливу поперечної сили в загальноприйнятому розумінні цих термінів. Для дійсної балки назви цих об'єктів потрібно уточнити. Назвемо їх *активними елементарними епюрами* й *активними елементарними лініями впливу* відповідних силових факторів. На рис. 4 для прикладу наведено активну елементарну лінію впливу поперечної сили. Аналогічно із (16) можна одержати активну елементарну епюру і лінію впливу згинальних моментів.

Запишемо функції внутрішніх зусиль: поперечних сил  $q_i^e$  і згинальних моментів  $m_i^e$  ( $i=0, 1, \dots, n, N$ ), – від кожної окремо взятої опорної реакції з урахуванням меж балки

$$q_i^e(x, y) = r_i(x) \cdot H(y - y_i) \times b(x, b_l, b_r) \cdot b(y, b_l, b_r); \quad (17)$$

$$m_i^e(x, y) = r_i(x) \cdot (y - y_i) \cdot H(y - y_i) \times b(x, b_l, b_r) \cdot b(y, b_l, b_r). \quad (18)$$

Назвемо функції (17), (18) *пасивними елементарними функціями* поперечних сил і згинальних моментів відповідно.

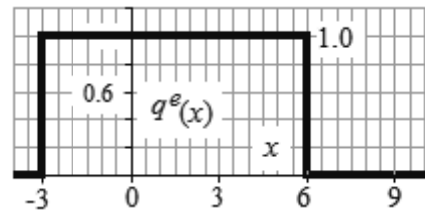


Рис. 4. Активна елементарна лінія впливу поперечної сили в перерізі балки з абсцисою  $y=6$  ( $b_l = -3, b_r = 9$ )

Складемо функції зусиль для дійсної балки від одиничної сили тепер уже з урахуванням разом із одиничною силою також і всіх реакцій, що нею викликані. Назвемо їх *основними функціями* внутрішніх зусиль і позначимо основну функцію поперечних сил через  $q$ , а основну функцію згинальних моментів через  $m$ . Їх можна скласти, користуючись принципом незалежності дії сил, як суми активної і всіх пасивних функцій даного зусилля

$$q = q(x, y) = q^e(x, y) + \sum_{i=0}^{n+1} q_i^e(x, y); \quad (19)$$

$$m = m(x, y) = m^e(x, y) + \sum_{i=0}^{n+1} m_i^e(x, y). \quad (20)$$

Нарешті, останнім кроком у розв'язанні другої задачі буде складання функцій внутрішніх зусиль від довільної групи сил. Нехай уздовж дійсної балки, розрахункова схема якої наведена на рис. 2 або, що те ж саме, на рис. 1, рухається в напрямку осі  $x$  довільна група із  $S$  сил, що зображена на рис. 5. Пунктиром зображено шлях (перед мостом, наприклад, якщо балку вважати мостом), на якому починається рух сил за межами балки. Оскільки група в цілому має координату  $x$ , яка збігається з координатою першої сили, то кожна наступна сила має зсунуту координату

$$x + a_2, x + a_3, \dots, x + a_S.$$

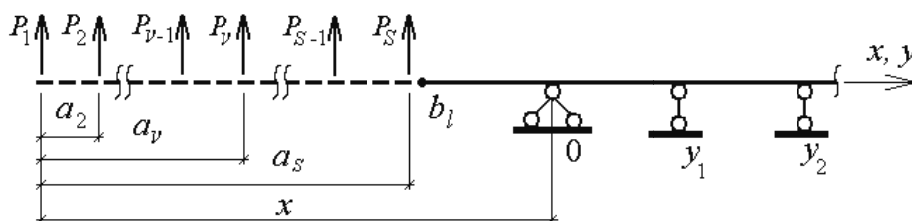


Рис. 5. Довільна рухома група сил, що „наїжджає“ на балку

Якщо вважати, що зсув першої сили  $a_1=0$ , і скористатися принципом незалежності дії сил, то можна тепер скласти для нерозрізної багатопрогонової балки функції поперечних сил  $Q$  і згинальних моментів  $M$

$$Q = Q(x, y) = \sum_{j=1}^S P_j \cdot q(x + a_j, y); \quad (21)$$

$$M = M(x, y) = \sum_{j=1}^S P_j \cdot m(x + a_j, y). \quad (22)$$

Як приклад застосування одержаних результатів розглянемо безконсольну нерозрізну 10-ти прогонову балку з рівними прогонами  $l=6$  м, уздовж якої рухається група із чотирьох сил ( $S=4$ ) з наступними параметрами

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 &= -160 \text{ кН}; \\ P_3 = P_4 &= -120 \text{ кН}; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 4,4 \text{ м}; \\ a_3 &= 5,4 \text{ м}; \quad a_4 = 9,0 \text{ м}. \end{aligned}$$

Користуючись (8), (11), (12), складемо у наближеному варіанті (без урахування поперечної сили  $Q$ ) функції реакцій відкинутих зв'язок  $X_i = X_i(x)$ ,  $i=1, \dots, n$ , що виникають унаслідок дії одиничної сили. За формулами (9), (11), (12) одержимо функції опорних реакцій від дії одиничної сили  $r_j = r_j(x)$ ,  $j=0, \dots, n+1$ . За формулами (15), ..., (18) складемо активні й пасивні елементарні функції поперечних сил і моментів, а за формулами (19), (20) – базові функції цих зусиль  $q=q(x, y)$  і  $m=m(x, y)$ . Нарешті, за формулами (21), (22) складемо функції зусиль  $Q=Q(x, y)$  і  $M=M(x, y)$ , як лінійні комбінації базових функцій зі зсунутими координатами  $x$ .

Наведені в цій статті формули перевірені порівнянням результатів, що одержані за їх допомогою, з результатами обчислень у програмі SCAD. Так, наприклад, реакція 5-ї опори, що викликана одиничною силою (1 кН) з прив'язкою  $x=27,717431711$  м, за наближеними формулами цієї статті і та сама реакція за програмою SCAD (без урахування зсуву) становить  $r_5 = -0,748019849$  кН. Тобто результати збігаються щонайменше з точністю до 9-го знаку.

На рис. 6 і 7 наведено поверхневі графіки функції згинальних моментів від рухомої групи сил із даного прикладу.

Поверхневий графік на рис. 6 дає грубо наближену картину розподілу згинальних моментів у залежності від координати базової точки групи рухомих сил. Але фрагмент того ж графіка в колі очікуваної точки максимуму (рис. 7) відрізняється більшою гладкістю і, як буде показано далі, має достатню для практичних застосувань точність.

На поверхневому графіку (рис. 6) всі піки й западини розташовані діагонально. Це наводить на думку, що ортогональні до осей  $x$  та  $y$  зрізи поверхні згинальних моментів, якими є лінії впливу й епюри, не найкращим чином придатні для аналізу зусиль на екстремуми. Кращого результату можна очікувати від сумісного застосування серії діагональних зрізів і ліній впливу внутрішніх зусиль у фіксованих перерізах над опорами. Плоскі криві, що утворюються в результаті діагональних зрізів, назвемо *діагональними кривими* внутрішніх зусиль.

Функції, що задають діагональні криві (назвемо їх теж *діагональними*), можна одержати із функцій внутрішніх силових факторів, якщо покласти  $y = x + \Delta x$ , де  $\Delta x$  – відстань діагонального зрізу від головної діагоналі ( $y = x$ ).

Повертаючись до нашого прикладу, складемо діагональні функції для кожної з рухомих сил таким чином, щоб переріз, в якому відстежується зусилля, перебував під час руху саме під нею. Так, діагональна функція згинальних моментів під першою силою матиме вигляд  $M=M(x, x)$ , під другою –  $M=M(x, x+4,4)$ , під третьою –  $M=M(x, x+5,4)$  і під четвертою –  $M=M(x, x+9,0)$ , де  $M$  – функція згинальних моментів за формулою (22). Такий вибір діагональних функцій пояснюється припущенням, що екстремуми знаходяться в точках прикладання зосереджених сил або близько від них.

Порівнюючи екстремуми ліній впливу згинальних моментів над проміжними опорами  $M(x, 6), \dots, M(x, 54)$  і екстремуми діагональних кривих  $M(x, x)$ ,  $M(x, x+4,4)$ ,  $M(x, x+5,4)$ ,  $M(x, x+9,0)$  – рис. 8 і 9 (для прикладу) – доходимо висновку, що максимальний за абсолютною величиною від'ємний момент  $M(51,8, 54) = -245$  кН·м досягається на 9-й опорі ( $x=51,8$  м,  $y=54$  м на рис. 8), а максимальний додатний момент

$$M(-2,2, -2,2 + 4,4) = +280$$

досягається під другою силою в перерізі з координатою  $y = 2,2 \text{ м}$ , коли базова точка групи сил має координату  $x = -2,2 \text{ м}$  (рис. 9).

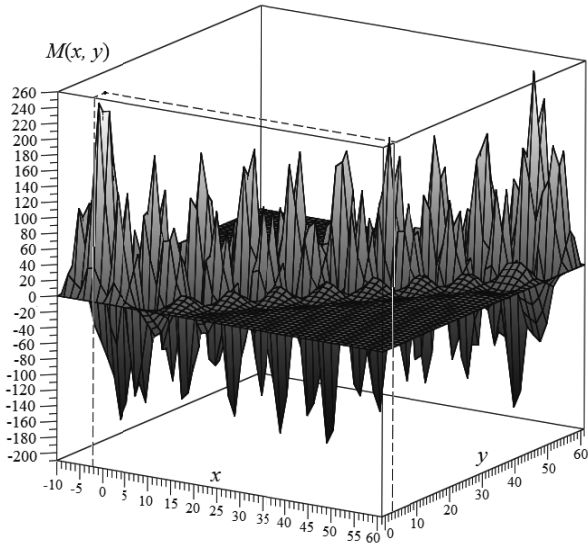


Рис. 6. Графік функції згинальних моментів

Аналогічно можна знайти екстремуми поперечних сил, але треба враховувати, що їх графік терпить розрив у точках прикладання зосереджених сил і реакцій. Тому треба порівнювати не просто значення поперечних сил у перерізах, що розташовані в характерних точках (під силами й над опорами) – а пари значень у перерізах, що взяті нескінченно близько ліворуч і

праворуч від них. Унаслідок такого порівняння доходимо висновку, що, коли група сил має координату  $x = 49,6 \text{ м}$ , у правому нескінченно малому околі дев'ятої опори поперечна сила досягає максимального за абсолютною величиною значення, а саме

$$Q(49,6, 54 + \varepsilon) = 311$$

(рис. 10), де  $\varepsilon = 10^{-6} \text{ (м)}$  для даного прикладу.

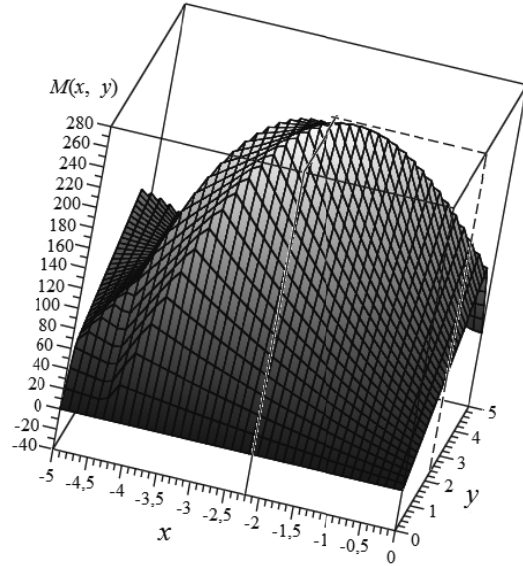


Рис. 7. Фрагмент графіка функції згинальних моментів в околі точки  $(x \approx -2,2, y \approx 2,2)$

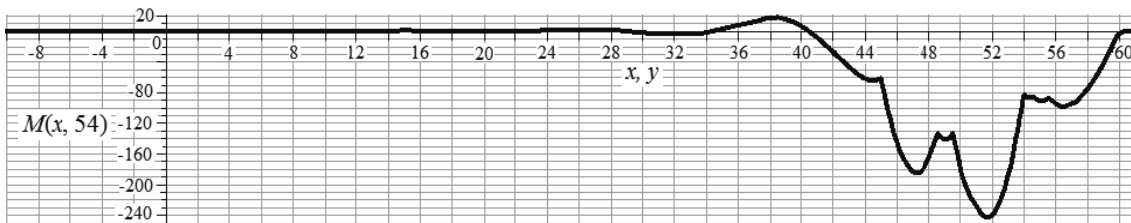


Рис. 8. Лінія впливу згинального моменту в перерізі над 9-ю опорою ( $y = 54 \text{ м}$ )

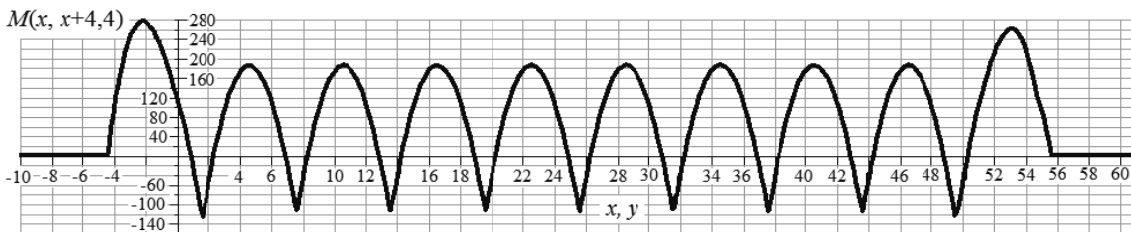


Рис. 9. Діагональна крива згинальних моментів у перерізах ( $y = x + 4,4$ ) під другою силою, що належить до рухомої групи сил

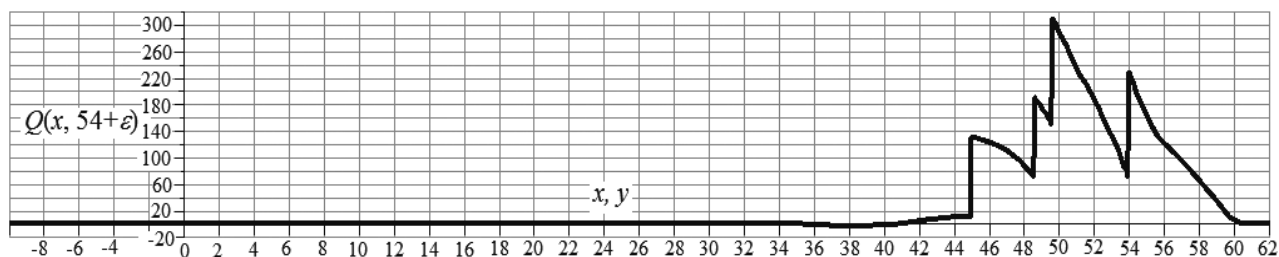


Рис. 10. Лінія впливу поперечної сили в перерізі праворуч поблизу від 9-ї опори ( $y=54$  м)

Якщо одержані результати уточнити чисельним розрахунком, то з'ясується, що, насправді, екстремальні точки, як і самі екстремуми, хоч і дуже близькі до тих, що одержані з графіків, але все-таки трохи інші. Наприклад, максимальний за абсолютною величиною згинальний момент досягається не в точці  $x=-2,2$  м, а в точці  $x=-2,199$  м і складає не  $280$  кН·м, а  $276,427$  кН·м. На рис. 7 вершина поверхні моментів має позначку більшу від 270 і меншу від 280, що узгоджується з чисельним результатом і підтверджує достатню для практики точність фрагмента поверхневого графіка. Але правдивість одержаних результатів залежить від правдивості нашого припущення про точки екстремумів, і обґрунтоване дослідження на екстремум функцій внутрішніх зусиль заслуговує бути темою окремої статті.

**Висновки.** Метод обчислення внутрішніх зусиль у балках можна подати в зручній для програмування формі, якщо знайти аналітичне розв'язання задачі про опорні реакції від одиначної сили, що рухається вздовж балки, і узагальнити розрахункову схему таким чином, щоб можна було будь-яку балку зобразити як консольну. Першого можна досягти за допомогою функції Хевісайда, другого – умовним подовженням балки у нескінченність, де існує удаване защемлення її кінця.

Пошук екстремумів можна вдосконалити застосуванням поверхневих графіків внутрішніх зусиль та їх плоских зрізів, якими є епюри, лінії впливу і графіки спеціальних функцій, що названі діагональними.

#### Список літератури / References

1. Снитко Н.К. Строительная механика: Учебник для вузов / Снитко Н.К. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.  
Snitko N.K. Structural mechanics: Higher school textbook / Snitko N.K. – М.: Vysshaya Shkola, 1980. – 431 p.
2. Математическая энциклопедия. Т.5 / [Гл. ред. И.М. Виноградов]. – М.: „Советская Энциклопедия“, 1984. – 1248 с.  
Encyclopaedia on mathematics. Vol.5 / [Chief editor I.M. Vinogradov]. – М.: “Sovetskaya Entsiklopediya”, 1984. – 1248 p.

3. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов: Учебник для вузов / Феодосьев В.И. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

Feodosyev V.I. Strength of materials: higher school textbook / Feodosyev V.I. – М.: Nauka, 1986. – 512 p.

Найдено аналитическое решение задачи об опорных реакциях неразрезных многопролетных балок, нагруженных подвижной группой сил. Предложена обобщенная расчетная схема, позволяющая любую балку после составления функций опорных реакций представить как консольную, и специальные функции распределения вдоль балки внутренних усилий от подвижной группы сил. Ортогональные к осям координат сечения поверхностных графиков этих функций являются эпюрами и линиями влияния внутренних усилий. Показана также возможность применения других плоских сечений поверхностных графиков для поиска максимальных внутренних усилий в нормальных сечениях балок.

**Ключевые слова:** балки, эпюры, линии влияния, внутренние усилия, поиск максимума, программирование

The analytical solution of the problem of support reactions of multispan beams loaded by several moving forces has been found. The generalized model of beam that allows presenting of any beam as a cantilever after finding the functions of the supporting reactions and special functions of distribution of internal forces from several moving forces along the beam have been proposed. Sections of the surface graphs of these functions, orthogonal to the axes of coordinates, are diagrams and influence lines of internal efforts. The possibility of use of other plane sections of the surface graphs to determine internal efforts in the cross sections of beams was presented as well.

**Keywords:** beams, diagrams, influence lines, internal forces, maximum seeking, programming

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук С.К. Мецаніновим. Дата надходження рукопису 04.02.11