

# ГЕОТЕХНІЧНА І ГІРНИЧА МЕХАНІКА, МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 531.391:621.86.01

Н.В. Каряченко<sup>1</sup>, канд. техн. наук, доц.,  
А.П. Иванова<sup>2</sup>, канд. техн. наук, доц.

1 – Национальная металлургическая академия Украины,  
г. Днепропетровск, Украина, e-mail: solo217@mail.ru  
2 – Государственное высшее учебное заведение „Национальный  
горный университет“, г. Днепропетровск, Украина,  
e-mail: ivaso@94mail.ru

## К ВОПРОСУ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КАНАТОВ ГРУЗОТРАНСПОРТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ПОДВИЖНОЙ ДИСКРЕТНОЙ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ

N.V. Karyachenko<sup>1</sup>, Cand. Sci. (Tech.), Assoc. Prof.,  
A.P. Ivanova<sup>2</sup>, Cand. Sci. (Tech.), Assoc. Prof.

1 – National Metallurgical Academy of Ukraine,  
Dnipropetrovsk, Ukraine, e-mail: solo217@mail.ru  
2 – State Higher Educational Institution “National Mining  
University”, Dnipropetrovsk, Ukraine, e-mail: ivaso@94mail.ru

## ON THE ISSUE OF FORCED VIBRATIONS OF ROPES OF LOAD-TRANSPORTING DEVICES WITH THE MOBILE DISTRIBUTED AND CONCENTRATED INERTIAL LOAD

Выполнено решение дифференциального уравнения, описывающего вынужденные поперечные колебания канатов грузотранспортирующих канатных устройств, несущих подвижную дискретную и распределенную инерционную нагрузку. Получены формулы для определения амплитуд вынужденных поперечных колебаний канатов в зависимости от скорости движения и соотношения между собственной и вынужденной частотой колебаний. Построены формы вынужденных и вынужденных „сопровождающих“ колебаний при различных скоростях движения канатов и различных значениях частоты вынуждающего воздействия.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, подвижная инерционная нагрузка, сосредоточенный груз, двухволновой характер процессов, амплитуда колебаний, резонансная зона

**Актуальность проблемы.** Динамика канатов грузотранспортирующих устройств, несущих подвижную распределенную и дискретную инерционную нагрузку, исследована при одноволновом представлении решения разрешающих уравнений движения, то есть, при представлении решения в виде одной группы стоячих волн. Такое представление дает неполную и, в большинстве случаев, ошибочную картину протекания динамических процессов, происходящих в таких системах, а именно, колебания в них осуществляются в виде суммы двух групп стоячих волн с одинаковыми частотами, но различными формами и фазами колебаний.

В работах, посвященных исследованию динамики канатов грузотранспортирующих устройств с подвижной инерционной нагрузкой и учитывающих двухволновой характер процессов, происходящих в них, в основном, рассматриваются решения для систем с равномерно распределенной по длине массовой нагрузкой. В то же время, наличие в ней дискретных масс грузов оказывает существенное влияние на качествен-

ную картину и количественные характеристики динамических процессов исследуемых объектов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим вынужденные поперечные колебания канатов грузотранспортирующих канатных устройств, несущих подвижную дискретную и распределенную инерционную нагрузку. Однородное дифференциальное уравнение поперечных колебаний одной из ветвей каната таких устройств имеет вид

$$\rho(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho(x)v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (T - \rho(x)v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (1)$$
$$0 \leq x \leq l,$$

где  $\rho(x) = \rho_0 + \sum_{k=1}^m M_k \delta(x - x_k)$  – погонная масса каната и сосредоточенных грузов;  $\rho_0$  – масса единицы длины каната;  $M_k$  – масса  $k$ -го сосредоточенного груза;  $\delta(x - x_k)$  – функция Дирака;  $x_k = x_{k0} + vt$  – координата  $k$ -го груза;  $x_{k0}$  – начальное положение  $k$ -го груза;  $T$  – натяжение каната;  $v$  – скорость движения;  $l$  – длина участка каната между опорами;  $w(x, t)$  – поперечное отклонение каната.

В силу эллиптичности ведущего барабана или других конструктивных особенностей, в точке набегания каната на барабан возможны периодические поперечные перемещения. В этом случае, граничные условия могут быть записаны в виде (2) статьи [1] и переход к новой функции  $v(x, t)$ , связанной с  $w(x, t)$ , осуществляется по формуле (3) из [1]. Тогда дифференциальное уравнение (1) будет следующим

$$c_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2b_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - a_1(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (2)$$

где  $c_1(x) = \rho(x)$ ;  $b_1(x) = \rho(x)v$ ;  $a_1(x) = T - \rho(x)v^2$ ;

$$f(x, t) = h \left[ \left( c_1(x)p^2 - a_1(x) \frac{\pi^2}{4l^2} \right) \sin \frac{\pi}{2l} x \sin pt - b_1(x) \frac{p\pi}{l} \cos \frac{\pi}{2l} x \cos pt \right]$$

с нулевыми граничными условиями

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

**Методика исследования.** Исследуем только вынужденные колебания каната, т.е. такие колебания, которые совершаются под действием внешних возмущений, когда начальные возмущения отсутствуют. Приближенное решение уравнения (2) возьмем как суперпозицию частных решений в виде

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^N v_n(x, t) = \sum_{n=1}^N \left[ \sin \frac{n\pi}{l} x \left( \cos \frac{d_n}{l} x T_{1n}(t) - \sin \frac{d_n}{l} x T_{2n}(t) \right) \right], \quad (3)$$

где  $d_n = n\pi v \sqrt{\left( \rho_0 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^m M_k \sin^2 \frac{\pi}{l} x_k \right) / T}$ ;  $T_{1n}(t)$ ;

$T_{2n}(t)$  – функции, которые необходимо определить.

Функцию  $f(x, t)$  в уравнении (2) представим в виде следующего разложения

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^N \left( a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{d_n}{l} x \sin pt + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{d_n}{l} x \cos pt \right).$$

Коэффициенты разложения  $a_n$  и  $b_n$  определяются по формулам (9) статьи [1]. Вычислив вторые частные производные решения  $v(x, t)$ , отыскиваемого в виде (3) при  $N = 2$ , подставим их в уравнение (2) и проведем необходимые преобразования, вводя комплексную функцию действительного переменного

$$T_n(t) = T_{1n}(t) + iT_{2n}(t),$$

а также используя идею метода Галеркина, после всех выкладок получим следующую систему уравнений

$$\bar{a} \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{d_n^2}{l^2} \right) T_n(t) + 2i\bar{b} \frac{d_n}{l} \dot{T}_n(t) + \bar{c} \ddot{T}_n(t) = a_n \sin pt + ib_n \cos pt; \quad (4)$$

$$\bar{a} \frac{d_n}{l} T_n(t) + i\bar{b} \dot{T}_n(t) = 0; \quad (5)$$

$$(n = 1, 2),$$

где

$$\bar{a} = T - \left( \rho_0 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^m M_k \sin^2 \frac{\pi}{l} x_k \right) v^2;$$

$$\bar{b} = \left( \rho_0 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^m M_k \sin^2 \frac{\pi}{l} x_k \right) v;$$

$$\bar{c} = \rho_0 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^m M_k \sin^2 \frac{\pi}{l} x_k.$$

Из (5) выразим  $T_n(t)$  и подставим в (4), предварительно преобразовав правую часть этого уравнения

$$\ddot{T}_n(t) + \frac{\bar{a}}{\bar{c}} \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{d_n^2}{l^2} \right) T_n(t) = \alpha_{1n} e^{ipt} + \alpha_{2n} e^{-ipt}; \quad (6)$$

$$(n = 1, 2),$$

где

$$\alpha_{1n} = \frac{1}{\bar{c}} \left( \frac{a_n}{2i} + \frac{ib_n}{2} \right); \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{\bar{c}} \left( \frac{ib_n}{2} - \frac{a_n}{2i} \right). \quad (7)$$

Квадратный корень из выражения, стоящего перед функцией  $T_n(t)$  в (6), является частотой собственных колебаний каната, формула которой полностью совпадает с выражением частот колебаний, полученных при решении однородного дифференциального уравнения поперечных колебаний канатов (1.20) работы [2].

Поэтому, перепишем уравнение (6) так

$$\ddot{T}_n(t) + \omega^2 T_n(t) = \alpha_{1n} e^{ipt} + \alpha_{2n} e^{-ipt}, \quad (n = 1, 2), \quad (8)$$

решение его возьмем в следующем виде

$$T_n(t) = h_{1n} e^{ipt} + h_{2n} e^{-ipt}, \quad (n = 1, 2) \quad (9)$$

Подставляя (9) и его вторую производную в (8), после необходимых преобразований определим  $h_{1n}$  и  $h_{2n}$

$$h_{1n} = \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n^2 - p^2}; \quad h_{2n} = \frac{\alpha_{2n}}{\omega_n^2 - p^2}; \quad (n = 1, 2).$$

Решение  $T_n(t)$  примет вид

$$T_n(t) = \frac{\alpha_{1n}}{\omega_n^2 - p^2} e^{ipt} + \frac{\alpha_{2n}}{\omega_n^2 - p^2} e^{-ipt}; \quad (n = 1, 2). \quad (10)$$

Выделим в (10) действительную и мнимую части, подставив вместо  $\alpha_{1n}$  и  $\alpha_{2n}$  их выражения из (7)

$$T_{1n}(t) = \text{Re}\{T_n(t)\} = \frac{a_n}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)} \sin pt;$$

$$T_{2n}(t) = \text{Im}\{T_n(t)\} = \frac{b_n}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)} \cos pt;$$

$$(n = 1, 2).$$

Подставляя значения  $T_{1n}(t)$ ,  $T_{2n}(t)$  и  $d_n$  в решение (3), имеем

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^2 v_n(x, t) = \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)} \times \left[ \bar{a}_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} v \beta_1 x \sin pt - \bar{b}_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} v \beta_1 x \cos pt \right],$$

где  $\frac{1}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)}$  – амплитуда вынужденных колебаний,

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\rho_0 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^m M_k \sin^2 \frac{\pi}{l} x_k}{T}}.$$

Возвратившись от функции  $v(x, t)$  к функции  $w(x, t)$ , получим приближенное решение задачи о вынужденных колебаниях каната, несущего подвижную распределенную и дискретную инерционную нагрузку

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^2 w_n(x, t) = \sum_{n=1}^2 [\bar{\varphi}_n(x) \sin pt + \bar{\psi}_n(x) \cos pt] \quad (11)$$

где

$$\bar{\varphi}_n(x) = \left( \frac{a_n}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)} \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} v \beta_1 x + h \sin \frac{\pi}{2l} x \right);$$

$$\bar{\psi}_n(x) = - \frac{b_n}{\bar{c}(\omega_n^2 - p^2)} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} v \beta_1 x,$$

$\bar{\varphi}_n(x)$  – формы вынужденных колебаний;  $\bar{\psi}_n(x)$  – формы вынужденных „сопровождающих“ колебаний.

Полученное решение (11) позволяет исследовать поведение системы при прохождении ее через резонанс в зависимости от скорости движения канатов, соотношения между собственной и вынужденной частотой колебаний, количества грузов между опорами, значений их масс и расположения.

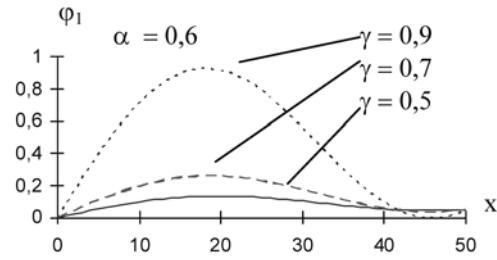


Рис. 1. Изменение первой формы вынужденных колебаний при движении одного груза

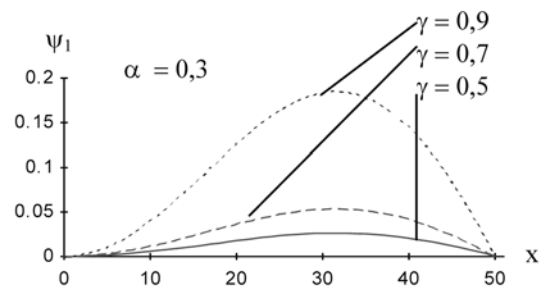


Рис. 2. Изменение первой формы вынужденных „сопровождающих“ колебаний при движении одного груза

Рассмотрим как изменяются первые формы вынужденных колебаний и вынужденных „сопровождающих“ колебаний при конкретном  $x_1$ . На рис. 1 и рис. 2 показано изменение форм вынужденных колебаний для грузотранспортирующего канатного устройства со следующими параметрами:  $l = 50$  м;

$$T = 12500 \text{ Н}; \quad \rho_0 = 5 \text{ кг/м}; \quad \sum_{k=1}^m M_k = 600 \text{ кг}; \quad v = 5 \text{ м/с};$$

$x_1 = 10$  м. Графики построены при различных скоростях движения канатов, описываемых коэффициентом  $\alpha$ , и различных значениях частоты вынуждающего воздействия, описываемых коэффициентом  $\gamma$ , равным отношению частоты вынуждающего воздействия  $p$  к первой собственной частоте  $\omega_1$  ( $\gamma = p/\omega_1$ ). Вынуждающее воздействие, приложенное в точке набегания каната на барабан, имеет вид  $h \sin pt$ . В нашем примере  $h = 0,05$  м.

Анализ приведенных графиков и полученных решений показывает, что с увеличением  $\alpha$  происходит как деформация форм вынужденных колебаний, так и изменение их амплитуд. С увеличением  $\gamma$  происходит увеличение амплитуд вынужденных и вынужденных „сопровождающих“ колебаний, и при приближении колебаний системы к резонансным зонам их рост становится значительным. При  $\alpha = 0$  (скорость движения канатов равна нулю), вынужденные „сопровождающие“ колебания отсутствуют.

При малом числе сосредоточенных грузов между опорами, в связи со значительным изменением собственных частот колебаний на протяжении всего цикла движения, система проходит через несколько резонансных зон, что качественно меняет картину распределения резонансных зон на всей трассе движения грузов, по сравнению с аналогичной картиной для систем с равномерно распределенной нагрузкой.

Анализ полученных выражений для амплитуд вынужденных колебаний при движении одного груза между опорами показывает, что когда частота вынуждающего воздействия  $p$  ниже области изменения первой собственной частоты колебаний  $\omega_1$  (рис. 3), максимального значения амплитуда достигает, когда груз находится посередине, минимальные значения – в начале и конце участка между опорами (пунктирная линия на рис. 3). Когда  $p$  выше области изменения  $\omega_1$ , максимальные значения амплитуд наблюдаются, когда груз находится на концах участка, минимальное – когда груз посередине (сплошная линия на рис. 3).

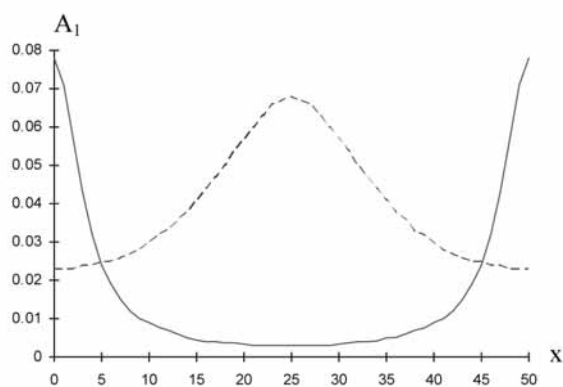


Рис. 3. Изменение амплитуды вынужденных колебаний при  $p = 3,5 > \omega_1$  и  $p = 1 < \omega_1$

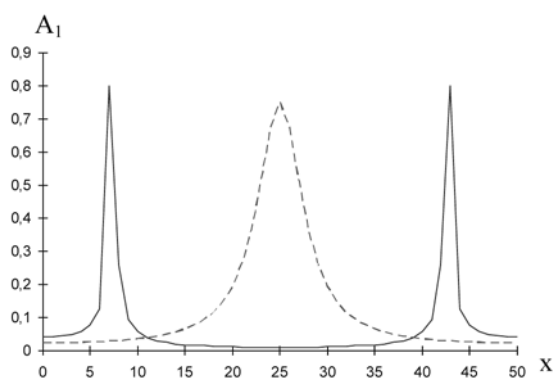


Рис. 4. Изменение амплитуды вынужденных колебаний при  $p = 1.21 \rightarrow \omega_{1min}$ ;  $\omega_{1min} < p = 2.2 < \omega_{1max}$

Когда прямая, определяющая значение частоты вынуждающего воздействия  $p$ , пересекает область изменения собственной частоты  $\omega_1$ , на графике из-

менения амплитуды вынужденных колебаний появляются две области прохождения системы через резонанс (рис. 4, сплошная линия). Если частота вынуждающего воздействия  $p$  равна минимальному значению  $\omega_1$ , то будет одна область прохождения системы через резонанс, которая приходится на середину участка между опорами (рис. 4, пунктирная линия).

**Выводы.** На основании вышеизложенного следует, что в зависимости от значения частоты вынуждающего воздействия для систем с сосредоточенными грузами необходим более детальный анализ возможности возникновения в таких системах резонансных режимов, чем это требуется для систем с равномерно распределенной инерционной нагрузкой, в которых частоты собственных колебаний постоянны.

### Список литературы / References

1. Каряченко Н.В. Вынужденные поперечные колебания канатов грузотранспортирующих устройств / Каряченко Н.В. // Вибрации в технике и технологиях. – 1998. – №5(9). – С. 12 – 13. – Библиогр.: С. 13.  
Karyachenko N.V. Forced transverse vibrations of ropes of load-transporting devices / Karyachenko N.V. // Vibrations in technics and technology. – 1998. – No.5(9). – P. 12–13. – Bibliogr.: P. 13.
2. Ильин Р.Ф. Особенности динамики канатных грузотранспортирующих устройств, несущих подвижную распределенную и сосредоточенную инерционную нагрузку / Ильин Р.Ф., Каряченко Н.В. // Прикладная механика. – 2007. – Том 43 (53). – №1. – С. 117–133. – Библиогр.: С. 133. – ISSN 0032 – 8243.  
Ilin R.F. Features of dynamic of load-transporting devices with ropes, bearing the mobile distributed and concentrated inertial load / Ilin R.F., Karyachenko N.V. // Prikladnaya mekhanika. – 2007. – Vol.43 (53). – No.1. – P. 117–133. – Bibliogr.: P. 133. – ISSN 0032-8243.
3. Горошко О.А. Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины / Горошко О.А., Савин Г.Н. – К.: Наук. думка, 1971. – 224 с. – Библиогр.: С. 218–224.  
Goroshko O.A. Introduction to mechanics of one-dimensional deformable objects of variable length / Goroshko O.A., Savin G.N. – K.: Nauk. dumka, 1971. – 224 p. – Bibliogr.: p. 218–224.

Побудовано розв'язок диференціального рівняння, що описує вимушені поперечні коливання канатів вантажотранспортуючих канатних пристроїв, які несуть рухоме дискретне і розподілене інерційне навантаження. Отримано формули для визначення амплітуд вимушених поперечних коливань канатів залежно від швидкості руху і співвідношення між власною і вимушеною частотою коливань. Побудовано форми вимушених і вимушених „супровідних“ коливань при різних швидкостях руху канатів і різних значеннях частоти примушуючої дії.

**Ключові слова:** вимушені коливання, рухоме інерційне навантаження, зосереджений вантаж, двохвильовий характер процесів, амплітуда коливань, резонансна зона