при снижении концентрации метана до допустимой струи согласно ПБ.

Для решения поставленных задач составлены и решены дифференциальные уравнения.

Предлагаемые методики подтверждены решением численных примеров.

Список литературы

1. Руководство по проектированию вентиляции угольных шахт. Государственный нормативный акт об охране труда. – К.: Основа, 1994. – 311 с.
2. Правила безпеки у вугільних шахтах: НПАОП 10.0-1.01-05/ – К.,2005 р. –398 с.: іл., табл. – (Нормативно-правовий акт з охорони праці).
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике/ Выгодский М.Я. – Москва, „Наука“, 1977.
4. Руководство по проектированию вентиляции угольных шахт. Государственный нормативный акт об охране труда.– М.: Недра, 1975.

Розглядаються питання визначення основних характеристик системи вентиляції тупикових виробок з урахуванням конкретних аеродинамічних характеристик вентиляторів місцевого провітрювання. При рішенні поставленої задачі розглянуто варіанти використання гнучких трубопроводів. Достовірність запропонованої методики підтверджується чисельними розрахунками. Практична цінність роботи полягає в розробці універсальної моделі вентиляційної системи тупикової виробки, що дозволяє враховувати всі складові джерела тяги і трубопровід при різних варіантах провітрювання.

Ключові слова: *тупикові виробки, параметри вентиляції, концентрація метану*

The questions of determination of basic features of the ventilation system in dead-ended mine workings are examined taking into account concrete aerodynamic descriptions of ventilators of local ventilation. Variants using flexible conduit for solving the problem are considered. Authenticity of the offered method is confirmed by numerical calculations. The practical value of work consists in development of universal model of the ventilation system of the dead-ended mine working, allowing to take into account all of constituents of source of draught with different variants of ventilation.

Keywords: dead-ended mine workings, ventilation parameters, concentration of methane

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.І. Голіньком. Дата надходження рукопису 24.02.11

УДК 622.648.2:517.911

Е.А. Кириченко, д-р. техн. наук, проф.,
В.Г. Шворак, канд. техн. наук, доц.,
В.Е. Кириченко, канд. техн. наук,
А.В. Романюков, А.А. Татуревич

Государственное высшее учебное заведение „Национальный горный университет“, г. Днепропетровск, Украина,
e-mail: kirichenko@front.ru

К ВОПРОСУ РАЗРАБОТКИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Ye.A. Kirichenko, Dr. Sc. (Tech.), Professor,
V.G. Shvorak, Cand. Sc. (Tech.), Associate Professor,
V.Ye. Kirichenko, Cand. Sc. (Tech.),
A.V. Romaniukov, A.A. Taturevich

State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnipropetrovsk, Ukraine,
e-mail: kirichenko@front.ru

ON THE ISSUE OF DEVELOPMENT OF NUMERICAL METHOD FOR CALCULATION OF MULTIPHASE FLOWS DYNAMICS

Предложено математическое обеспечение для расчета нестационарных многофазных течений в элементах насосных и эрлифтных гидроподъемов минерального сырья со дна Мирового океана. Получены характеристические соотношения для системы дифференциальных уравнений, описывающих движение двухфазной и трехфазной смеси в трубопроводе в рамках раздельной модели течения. Разработанный подход к расчету динамики многофазных потоков открывает широкие возможности для проектирования глубоководных насосных установок и анализа их эксплуатационных режимов.

Ключевые слова: *гидросмесь, гидроподъем, насосный гидроподъем, твердые полезные ископаемые, глубоководная добыча*

В настоящее время Украина ощущает дефицит некоторых стратегических цветных металлов, добываемых традиционным способом из материковых месторождений. Поэтому дальнейшее экономическое развитие нашей страны напрямую связано с освоением рудных месторождений Мирового океана.

Решением Совета национальной безопасности и обороны Украины от 16 мая 2008 года „О мероприятиях по обеспечению развития Украины как морского государства“, приведенным в действие указом Президента Украины № 463/2008 от 20 мая 2008 года, предусмотрена разработка новой „Национальной программы исследований и использования ресурсов Азово-Черноморского бассейна, других районов Мирового океана на 2009-2034 годы“. Таким образом, разработка технических средств подъема полезных ископаемых с морского дна на базовое средство, приобретает особую актуальность.

Данная статья посвящена **актуальной проблеме**, связанной с гидроподъемом минерального сырья в составе горно-морских предприятий при освоении рудных месторождений Мирового океана.

Среди известных способов гидроподъема горной массы специалисты выделяют конкурирующие на сегодняшний день насосный и эрлифтный варианты [1-3]. В гидравлических трактах таких установок реализуются многофазные течения, физика которых несоизмеримо сложнее физики однородных жидкостей.

Как известно, нестационарное движение однородной жидкости в трубопроводах описывается дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа, эффективным средством решения которых является метод характеристик [4]. В случае же нестационарных течений многофазных потоков система уравнений значительно усложняется и, в общем случае, теряет свою гиперболичность [5], что означает, что задача Коши с начальными данными, заданными на нехарактеристической поверхности, однозначно неразрешима.

Существуют различные подходы к расчету динамических характеристик многофазных потоков [6-10], опирающиеся на разной сложности математические модели движения смеси. В работе [11] разработана универсальная раздельная модель движения трехфазной смеси и получено обобщенное выражение для определения скорости распространения упругих волн в трехфазных средах, однако вопрос о способе численного интегрирования полученной системы уравнений остался открытым, т.к. на сегодняшний день для нее не были выведены характеристические соотношения.

По убеждению авторов, наиболее достоверные параметры нестационарных многофазных течений могут быть получены только на базе характеристических соотношений системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику многофазных потоков с наиболее полным учетом сил межфазного взаимодействия [11].

Целью данной статьи является получение характеристических соотношений для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение многофазных потоков в рамках раздельной модели для последующей разработки комплексного метода расчета динамики многофазных потоков.

Рассмотрим гидросмесь, содержащую одну дискретную фазу: твердые частицы. Движение будем рассматривать с континуальной точки зрения, считая, что твердые частицы движутся со своей скоростью. Предположим, что движение одномерное. Пренебрегаем силами непосредственного трения частиц о стенки трубопровода, а также считаем, что собственная скорость частиц мала, по сравнению со скоростью звука в смеси.

При сделанных допущениях математическая модель течения двухфазной гидросмеси может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений неразрывности (1), (2) и движения (4), (5), записанных соответственно для жидкой и твердой фаз [11]

$$(1 - C_1)\frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 a_0^2 \frac{\partial C_1}{\partial t} + \rho_0 a_0^2 (1 - C_1)\frac{\partial V_0}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$C_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 a_1^2 \frac{\partial C_1}{\partial t} + \rho_1 a_1^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\left(1 + \frac{C_1 k_1}{2}\right)\frac{\partial V_0}{\partial t} - \frac{C_1 k_1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{(1 - C_1)}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = \phi_0; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\frac{\partial V_1}{\partial t} - \left(1 + \frac{k_1}{2}\right)\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = \phi_1, \quad (4)$$

где

$$\phi_0 = -(1 - C_1) g \sin\alpha - \frac{\lambda}{2D}\frac{\rho_{см}}{\rho_0}|V_{см}|V_{см} -$$

$$-\frac{3}{8}\left[\frac{C_1 C_{xm}}{R_1}|V_0 - V_1|(V_0 - V_1)\right];$$

$$\phi_1 = -\frac{\rho_1}{\rho_0} g \sin\alpha + \frac{3}{8}\frac{C_{xm}}{R_1}|V_0 - V_1|(V_0 - V_1);$$

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\rho_1}{K_1} + \frac{\rho_1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right);$$

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{1}{a_{ж}^2} + \frac{\rho_0}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right),\ a_{ж}^2 = \frac{K_{ж}}{\rho_0};$$

$$K_1 = \frac{E_1}{3(1 - 2\nu_1)};$$

$$\rho_{см} = \rho_0^* + \rho_1^* = (1 - C_1)\rho_0 + C_1\rho_1;$$

$$V_{см} = \frac{1}{\rho_{см}}\left(\rho_0^* V_0 + \rho_1^* V_1\right),$$

где K_1, E_1, ν_1 – модуль объемного сжатия, модуль Юнга и коэффициент Пуассона твердых частиц; $K_{ж}$ – объемный модуль упругости жидкости; $a_{ж}$ – скорость звука в чистой неограниченной жидкости; R_1 – эквивалентный радиус твердых частиц; k_1 – коэффициент, учитывающий влияние несферичности, а также концентрации твердых частиц на присоединенные массы; g – ускорение силы тяжести; α – угол наклона трубопровода к горизонту; D – диаметр трубопровода; λ – коэффициент Дарси; t – время; C_{xm} – коэффициент сопротивления твердых частиц; C_i – объемная концентрация фазы; p – давление; ρ_i – истинная плотность фазы; ρ_i^* –приведенная плотность фазы; V_i – скорость фазы; x – продольная координата. Индексы обозначают: "0" – вода; "1" – твердые частицы; "*см*" – смесь.

Заметим, что производная от концентрации C_1 входит только в уравнения неразрывности. Поэтому, выразив производную $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ из уравнения (2) и подставив ее в уравнение (1), получим общее уравнение неразрывности вида

$$\rho_0 a_0^2 (1-C_1)\frac{\partial V_0}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \left[(1-C_1) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2}\right]\frac{\partial p}{\partial t} = 0\,. \quad (5)$$

При этом общая система уравнений (1)-(4) разбивается на две подсистемы: первая подсистема, которая состоит из уравнений (3)-(5) и содержит производные только от величин V_0, V_1, V_2 и p, но не содержит производных от концентрации C_1, и вторая подсистема, состоящая из уравнения (2), которое содержит производные по времени от C_1 и связано с первой подсистемой через производные от величин p и V_1. В свою очередь, первая подсистема связана со второй подсистемой только через значение концентрации C_1 (но не ее производной), которая входит как в коэффициенты первой подсистемы, так и в правые части выражений для ϕ_0, ϕ_1.

Из первой подсистемы (3)-(5) определяются скорости распространения возмущений в смеси и характеристические соотношения на фронтах возмущений. А уравнение (2) представляет собой, по сути дела, обыкновенное дифференциальное уравнение для определения изменения концентраций C_1 с течением времени в каждой фиксированной точке x трубопровода после того, как на каждом временном слое времени t уже определены значения V_0, V_1 и p как функции координаты x.

Перейдем к исследованию характеристик для подсистемы (3)-(5).

Пользуясь процедурой определения характеристик на фазовой плоскости (x,t), введем характеристическую кривую $x = x(t)$ (фронт распространения возмущений) и запишем производные вдоль этой кривой в виде [4]

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}D;$$

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial x}D; \quad (6)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x}D,$$

где $D = x'(t)$ - скорость распространения фронта возмущений.

Исключим из системы (3)-(5) частные производные от неизвестных функций по времени при помощи соотношений (6). В результате получим следующую систему уравнений для производных $\frac{\partial V_0}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial x}$

$$\rho_0 a_0^2 (1-C_1)\frac{\partial V_0}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} -$$
$$-\left[(1-C_1) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2}\right] D\frac{\partial p}{\partial x} = B_1; \quad (7)$$

$$-\left(1+\frac{C_1 k_1}{2}\right)D\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{C_1 k_1}{2}D\frac{\partial V_1}{\partial x} +$$
$$+\frac{(1-C_1)}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_2; \quad (8)$$

$$\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D\frac{\partial V_0}{\partial x} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)D\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_3, \quad (9)$$

где обозначено

$$B_1 = -\left[(1-C_1) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2}\right]\frac{dp}{dt};$$

$$B_2 = \phi_0 - \left(1+\frac{C_1 k_1}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} + \frac{C_1 k_1}{2}\frac{dV_1}{dt};$$

$$B_3 = \phi_1 + \left(1+\frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_1}{dt}.$$

Условием того, что кривая $x = x(t)$ есть характеристикой, является равенство нулю характеристического определителя, составленного из коэффициентов системы (7)-(9) при производных $\frac{\partial V_0}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial x}$. Этот определитель имеет нулевой корень

$$D_3 = 0 \quad (10)$$

и два корня

$$D_{1,2} = \pm D_0; \quad (11)$$

$$D_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_y\left(\frac{(1-C_1)}{K_0} + \frac{C_1}{K_1} + \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial p}\right)}}, \quad (12)$$

где

$$\rho_y = \mu\cdot\rho_0,\ \mu = \frac{A}{B};$$

$$A = \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(1+\frac{C_1 k_1}{2}\right) + \frac{k_1}{2}(1-C_1);$$

$$B = \frac{\rho_1}{\rho_0}(1-C_1)^2 + (2-C_1)C_1 + \frac{k_1}{2}.$$

Выражение (10) означают, что в принятом приближении (т.е. при условии пренебрежения конвективными членами в исходных дифференциальных уравнениях) характеристиками (двойной кратности) на плоскости (x,t) являются все прямые $x = \text{const}$ [5].

Два ненулевых корня (11) соответствуют акустическим характеристикам, которые представляют собой фронты распространения возмущений вверх и вниз по потоку соответственно со скоростями

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = D_1 = D_0; \tag{13}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = D_2 = -D_0. \tag{14}$$

Как известно из общей теории характеристик, на каждой характеристической кривой должна выполняться определенная взаимосвязь между гидродинамическими параметрами среды – характеристическое соотношение.

Найдем сначала характеристическое соотношение на акустических характеристиках. Это соотношение определяется приравниванием к нулю определителя, который получается из характеристического определителя системы (7)-(9) путем замены любого его столбца столбцом правых частей B_1, B_2, B_3

$$\begin{vmatrix} \rho_0 a_0^2(1-C_1) & \rho_0 a_0^2 C_1 & B_1 \\ -\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)D & \frac{C_1k_1}{2}D & B_2 \\ \left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем полученный определитель

$$\rho_0 a_0^2(1-C_1)\begin{vmatrix} \frac{C_1k_1}{2}D & B_2 \\ -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & B_3 \end{vmatrix} -$$
$$-\rho_0 a_0^2 C_1 \begin{vmatrix} -\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)D & B_2 \\ \left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & B_3 \end{vmatrix} +$$
$$+B_1\begin{vmatrix} -\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)D & \frac{C_1k_1}{2}D \\ \left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D \end{vmatrix} = 0;$$

$$\rho_0 a_0^2(1-C_1)\left[B_3\frac{C_1k_1}{2}D + B_2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D\right] +$$
$$+\rho_0 a_0^2 C_1\left[B_3\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)D + B_2\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D\right] +$$
$$+B_1\left[\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D^2 - \frac{C_1k_1}{2}\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D^2\right] = 0;$$

$$\rho_0 a_0^2(1-C_1)\left[\left(\phi_1 + \left(1+\frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_1}{dt}\right)\frac{C_1k_1}{2}D +\right.$$
$$\left.+\left(\phi_0 - \left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} + \frac{C_1k_1}{2}\frac{dV_1}{dt}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D\right] +$$
$$+\rho_0 a_0^2 C_1\left[B_3\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)D + B_2\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D\right] -$$
$$-\left[(1-C_1) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2}\right]\frac{dp}{dt}\times$$
$$\times\left[\left(1+\frac{C_1k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D^2 - \frac{C_1k_1}{2}\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D^2\right] = 0.$$

После соответствующих преобразований, соотношение на акустических характеристиках можно представить в следующем виде

$$dp + \mu\rho_0 D_0\left[(1-C_1)dV_0 + C_1 dV_1\right] - \\ -\frac{\mu\rho_0 D_0}{A}\psi dt = 0. \tag{15}$$

$$-dp + \mu\rho_0 D_0\left[(1-C_1)dV_0 + C_1 dV_1\right] - \\ -\frac{\mu\rho_0 D_0}{A}\psi dt = 0. \tag{16}$$

В выражениях (15), (16) скорость D_0 определяется формулой (12), а функция Ψ имеет следующее выражение

$$\psi = \varphi_{ж} g \sin\alpha - \frac{\lambda\rho_{см}|V_{см}|V_{см}}{2D_{тр}\rho_0}\varphi_{тр} + \\ \frac{3}{8}\frac{C_{xm}}{R_1}|V_0 - V_1|(V_0 - V_1)\varphi_1, \tag{17}$$

где

$$\varphi_{ж} = -(1-C_1)\varphi_{тр} - C_1\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(1+\frac{k_1}{2}\right);$$

$$\varphi_{тр} = (1-C_1)\frac{\rho_1}{\rho_0} + C_1 + \frac{k_1}{2};$$

$$\varphi_1 = C_1(1-C_1)\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Подчеркнем, что характеристические соотношения на акустических характеристиках представляют собой связь между полными дифференциалами функций p, V_0 и V_1 вдоль этих характеристик, но они не содержат дифференциалов концентрации C_1.

Перейдем к определению характеристического соотношения на семействе $D = 0$. Это соотношение проще всего получить из системы уравнений (8)-(9), положив в ней $D = 0$. Тогда получим такие равенства

$$\left(\frac{1-C_1}{\rho_0}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=B_2;\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=B_3, \qquad (18)$$

которые выполняются при каждом x = const. Исключив из (18) производную $\frac{\partial p}{\partial x}$, получим следующее характеристическое условие

$$(1-C_1)B_3=B_2, \qquad (19)$$

выполняющееся на линиях x = const.

В развернутом виде уравнение (19) имеет вид

$$\begin{aligned}&\left[(1-C_1)\left(1+\frac{k_1}{2}\right)+1+\frac{C_1k_1}{2}\right]dV_0-\\&-\left[(1-C_1)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)+\frac{C_1k_1}{2}\right]dV_1-\Omega_1dt=0,\end{aligned} \qquad (20)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\Omega_1&=(1-C_1)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}-1\right)g\sin\alpha-\frac{\lambda\rho_{см}|V_{см}|V_{см}}{2D_{тр}\rho_0}-\\&-\frac{3}{8}\frac{C_{xт}}{R_1}|V_0-V_1|(V_0-V_1).\end{aligned} \qquad (21)$$

Характеристическое условие (20) выполняется вдоль линий x = const, так что содержащиеся в них дифференциалы dV_0 и dV_1 означают приращения соответствующих функций по времени в каждом фиксированном сечении трубопровода.

Отметим, что характеристическое соотношение (21) не содержит дифференциалов от концентрации C_1.

Таким образом, в общем случае смеси жидкости с твердой дискретной фазой имеется три семейства характеристик, вдоль каждого из которых выполняется некоторая связь между полными дифференциалами искомых функций dp, dV_0 и dV_1.

Дифференциал концентрации dC_1 в эти характеристические соотношения не входит. Значение концентрации C_1 подлежит определению из решения дифференциального уравнения (2), которое по отношению к $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ являются, по сути дела, обыкновенным дифференциальным уравнением, что позволяет осуществить его численное интегрирование с помощью конечно-разностных схем.

Следует отметить, что в реальных насосных гидроподъемах всегда содержится газовая фаза, влиянием которой на величину скорости звука в смеси пренебрегать нельзя [12].

Рассмотрим гидросмесь, состоящую из несущей жидкости и двух дискретных фаз: твердых частиц и газовых пузырей. Будем предполагать, что движение одномерное. Пренебрегаем силами непосредственного трения частиц о стенки трубопровода, взаимовлиянием твердых и газообразных частиц, а также считаем, что собственные скорости фаз малы, по сравнению со скоростью звука в смеси.

При сделанных допущениях математическая модель течения трехфазной гидросмеси может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений неразрывности и движения, записанных соответственно для жидкой, твердой и газообразной фаз [11]

$$\begin{aligned}&(1-C_1-C_2)\frac{\partial p}{\partial t}-\rho_0a_0^2\frac{\partial C_1}{\partial t}-\rho_0a_0^2\frac{\partial C_2}{\partial t}+\\&+\rho_0a_0^2(1-C_1-C_2)\frac{\partial V_0}{\partial x}=0;\end{aligned} \qquad (22)$$

$$C_1\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_1a_1^2\frac{\partial C_1}{\partial t}+\rho_1a_1^2C_1\frac{\partial V_1}{\partial x}=0; \qquad (23)$$

$$C_2\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_2a_2^2\frac{\partial C_2}{\partial t}+\rho_2a_2^2C_2\frac{\partial V_2}{\partial x}=0; \qquad (24)$$

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)\frac{\partial V_0}{\partial t}-\frac{C_1k_1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial t}-\frac{C_2k_2}{2}\frac{\partial V_2}{\partial t}+\\&+\frac{(1-C_1-C_2)}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\phi_0;\end{aligned} \qquad (25)$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)\frac{\partial V_1}{\partial t}-\left(1+\frac{k_1}{2}\right)\frac{\partial V_0}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\phi_1; \qquad (26)$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)\frac{\partial V_2}{\partial t}-\left(1+\frac{k_2}{2}\right)\frac{\partial V_0}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\phi_2, \qquad (27)$$

где

$$\begin{aligned}\phi_0&=-(1-C_1-C_2)g\sin\alpha-\frac{\lambda}{2D}\frac{\rho_{см}}{\rho_0}|V_{см}|V_{см}-\\&-\frac{3}{8}\left[\frac{C_1C_{xт}}{R_1}|V_0-V_1|(V_0-V_1)+\frac{C_2C_{xв}}{R_2}|V_0-V_2|(V_0-V_2)\right];\end{aligned}$$

$$\phi_1=-\frac{\rho_1}{\rho_0}g\sin\alpha+\frac{3}{8}\frac{C_{xт}}{R_1}|V_0-V_1|(V_0-V_1);$$

$$\phi_2=-\frac{\rho_2}{\rho_0}g\sin\alpha+\frac{3}{8}\frac{C_{xв}}{R_2}|V_0-V_2|(V_0-V_2);$$

$$\frac{1}{a_1^2}=\frac{\rho_1}{K_1}+\frac{\rho_1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right),\ \frac{1}{a_2^2}=\frac{\rho_2}{K_2}+\frac{\rho_2}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right);$$

$$\frac{1}{a_0^2}=\frac{1}{a_{ж}^2}+\frac{\rho_0}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right),\ a_{ж}^2=\frac{K_{ж}}{\rho_0};$$

$$K_1 = \frac{E_1}{3(1-2\nu_1)}, \ \frac{1}{K_2} = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial p}\right);$$

$$\rho_{см} = \rho_0^* + \rho_1^* + \rho_2^* = (1 - C_1 - C_2)\rho_0 + C_1\rho_1 + C_2\rho_2,$$

$$V_{см} = \frac{1}{\rho_{см}}\left(\rho_0^* V_0 + \rho_1^* V_1 + \rho_2^* V_2\right),$$

где K_2 – модуль объемного сжатия газовых пузырьков; R_2 – эквивалентный радиус газовых пузырьков; k_2 – коэффициент, учитывающий влияния несферичности, а также концентрации пузырьков воздуха на присоединенные массы; индекс „2“ обозначает величины, относящиеся к пузырькам газа.

Заметим, что производные от концентраций C_1 и C_2 входят только в уравнения неразрывности. Поэтому, выразив производную $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ из уравнения (23), а производную $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ из уравнения (24) и подставив их в уравнение (22), получим общее уравнение неразрывности вида

$$\rho_0 a_0^2 (1 - C_1 - C_2)\frac{\partial V_0}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + \left[(1 - C_1 - C_2) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\rho_0 a_0^2 C_2}{\rho_2 a_2^2}\right]\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (28)$$

При этом общая система уравнений (22)-(27), как и в случае с двухфазной смесью, разбивается на две подсистемы: первая подсистема, которая состоит из уравнений (25), (26), (27) и (28) и содержит производные только от величин V_0, V_1, V_2 и p, но не содержит производных от концентраций C_1 и C_2, и вторая подсистема (23), (24), которая содержит производные по времени от C_1 и C_2 и связана с первой подсистемой через производные от величин p, V_1 и V_2. В свою очередь, первая подсистема связана со второй подсистемой только через значения концентраций C_1 и C_2 (но не их производных), которые входят как в коэффициенты первой подсистемы, так и в правые части выражений для ϕ_0, ϕ_1 и ϕ_2.

Из первой подсистемы (25)-(28) определяются скорости распространения возмущений в смеси и характеристические соотношения на фронтах возмущений. Вторая подсистема (23), (24) представляет собой, по сути дела, систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения изменения концентраций C_1 и C_2 с течением времени в каждой фиксированной точке x трубопровода после того, как на каждом временном слое времени t уже определены значения V_0, V_1, V_2 и p как функции координаты x.

Перейдем к исследованию характеристик для подсистемы (28), (25)-(27). Пользуясь процедурой определения характеристик на фазовой плоскости (x,t), введем характеристическую кривую $x = x(t)$ (фронт распространения возмущений) и запишем производные вдоль этой кривой в виде [4]

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}D; \ \frac{dV_0}{dt} = \frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial x}D; \quad (29)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x}D; \ \frac{dV_2}{dt} = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x}D, \quad (30)$$

где $D = x'(t)$ - скорость распространения фронта возмущений.

Исключим из системы (28), (25)-(27) частные производные от неизвестных функций по времени при помощи соотношений (29), (30). В результате получим следующую систему уравнений для производных $\frac{\partial V_0}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial x}$

$$\rho_0 a_0^2 (1 - C_1 - C_2)\frac{\partial V_0}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \rho_0 a_0^2 C_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} - \left[(1 - C_1 - C_2) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\rho_0 a_0^2 C_2}{\rho_2 a_2^2}\right] D\frac{\partial p}{\partial x} = B_1; \quad (31)$$

$$-\left(1 + \frac{C_1 k_1 + C_2 k_2}{2}\right)D\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{C_1 k_1}{2}D\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{C_2 k_2}{2}D\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{(1 - C_1 - C_2)}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_2; \quad (32)$$

$$\left(1 + \frac{k_1}{2}\right)D\frac{\partial V_0}{\partial x} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)D\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_3; \quad (33)$$

$$\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)D\frac{\partial V_0}{\partial x} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right)D\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_4, \quad (34)$$

где обозначено

$$B_1 = -\left[(1 - C_1 - C_2) + \frac{\rho_0 a_0^2 C_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\rho_0 a_0^2 C_2}{\rho_2 a_2^2}\right]\frac{dp}{dt};$$

$$B_2 = \phi_0 - \left(1 + \frac{C_1 k_1 + C_2 k_2}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} + \frac{C_1 k_1}{2}\frac{dV_1}{dt} + \frac{C_2 k_2}{2}\frac{dV_2}{dt};$$

$$B_3 = \phi_1 + \left(1 + \frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\frac{dV_1}{dt}; \quad (35)$$

$$B_4 = \phi_2 + \left(1 + \frac{k_2}{2}\right)\frac{dV_0}{dt} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right)\frac{dV_2}{dt}.$$

Условием того, что кривая $x = x(t)$ есть характеристикой, является равенство нулю характеристического определителя, составленного из коэффициентов системы (31)-(34) при производных $\frac{\partial V_0}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial x}$. В отличие от случая двухфазной смеси, этот определитель имеет два нулевых корня

$$D_{3,4}=0 \tag{36}$$

и два корня, равные

$$D_{1,2}=\pm D_0;$$

$$D_0=\frac{1}{\sqrt{\rho_y\left(\frac{\left(1-C_1-C_2\right)}{K_0}+\frac{C_1}{K_1}+\frac{C_2}{K_2}+\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial p}\right)}}, \tag{37}$$

где

$$\rho_y=\mu\cdot\rho_0,\ \mu=\frac{A}{B};$$

$$\begin{aligned}
A=&\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)-\\
&-\frac{C_1k_1}{2}\left(1+\frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)-\\
&-\frac{C_2k_2}{2}\left(1+\frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right);\\
B=&\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)\left(1-C_1-C_2\right)^2+\\
&+C_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)\left[\left(1+k_1\right)\left(1-C_1-C_2\right)+1+\frac{C_1k_1}{2}+\frac{C_2k_2}{2}\right]+\\
&+C_2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)\left[\left(1+k_2\right)\left(1-C_1-C_2\right)+1+\frac{C_1k_1}{2}+\frac{C_2k_2}{2}\right]-\\
&\frac{1}{4}C_1C_2\left(k_1-k_2\right)^2.
\end{aligned} \tag{38}$$

Выражения (36) означают, что в принятом приближении (т.е. при условии пренебрежения конвективными членами в исходных дифференциальных уравнениях) характеристиками (двойной кратности) на плоскости (x,t) являются все прямые x = const [5].

Два ненулевых корня (37), как и прежде, соответствуют акустическим характеристикам, которые представляют собой фронты распространения возмущений вверх и вниз по потоку, соответственно со скоростями

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1=D_1=D_0; \tag{39}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2=D_2=-D_0. \tag{40}$$

Выражение (37) для скорости распространения возмущений (она же является скоростью гидроудара) в смеси жидкости с твердыми (но упруго сжимаемыми) частицами и газовыми пузырьками получено в [12] из системы дифференциальных уравнений раздельного движения жидкой, твердой и газообразной фаз с наиболее полным учетом сил межфазного взаимодействия и, прежде всего, сил инерционной природы.

Найдем сначала характеристическое соотношение на акустических характеристиках. Это соотношение определяется приравниванием к нулю характеристического определителя системы (31)-(34) при замене любого его столбца столбцом правых частей B_1, B_2, B_3, B_4

$$\begin{vmatrix}
\rho_0a_0^2\left(1-C_1-C_2\right) & \rho_0a_0^2C_1 & \rho_0a_0^2C_2 & B_1\\
-\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)D & \frac{C_1k_1}{2}D & \frac{C_2k_2}{2}D & B_2\\
\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & 0 & B_3\\
\left(1+\frac{k_2}{2}\right)D & 0 & -\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)D & B_4
\end{vmatrix}=0.$$

Раскроем полученный определитель

$$\rho_0a_0^2\left(1-C_1-C_2\right)\begin{vmatrix}
\frac{C_1k_1}{2}D & \frac{C_2k_2}{2}D & B_2\\
-\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & 0 & B_3\\
0 & -\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)D & B_4
\end{vmatrix}-$$

$$-\rho_0a_0^2C_1\begin{vmatrix}
-\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)D & \frac{C_2k_2}{2}D & B_2\\
\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & 0 & B_3\\
\left(1+\frac{k_2}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)D & B_4
\end{vmatrix}+$$

$$+\rho_0a_0^2C_2\begin{vmatrix}
-\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)D & \frac{C_1k_1}{2}D & B_2\\
\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & B_3\\
\left(1+\frac{k_2}{2}\right)D & 0 & B_4
\end{vmatrix}-$$

$$-B_1\begin{vmatrix}
-\left(1+\frac{C_1k_1+C_2k_2}{2}\right)D & \frac{C_1k_1}{2}D & \frac{C_2k_2}{2}D\\
\left(1+\frac{k_1}{2}\right)D & -\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}+\frac{k_1}{2}\right)D & 0\\
\left(1+\frac{k_2}{2}\right)D & 0 & -\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)D
\end{vmatrix}=0.$$

После соответствующих преобразований, соотношение на акустических характеристиках можно представить в следующем виде

$$dp + \mu\rho_0 D_0\left[(1 - C_1 - C_2)dV_0 + C_1 dV_1 + C_2 dV_2\right] - \\ - \frac{\mu\rho_0 D_0}{A}\psi dt = 0; \tag{41}$$

$$-dp + \mu\rho_0 D_0\left[(1 - C_2 - C_1)dV_0 + C_2 dV_2 + C_1 dV_1\right] - \\ - \frac{\mu\rho_0 D_0}{A}\psi dt = 0. \tag{42}$$

В выражениях (41), (42) скорость D_0 определяется формулой (37), μ и A – формулами (38), а функция Ψ имеет следующее выражение

$$\psi = \varphi_{ж} g \sin\alpha - \frac{\lambda\rho_{см}|V_{см}|V_{см}}{2D_{тр}\rho_0}\varphi_{тр} + \\ \frac{3}{8}\frac{C_{хт}}{R_1}|V_0 - V_1|(V_0 - V_1)\varphi_1 + \\ + \frac{3}{8}\frac{C_{хв}}{R_2}|V_0 - V_2|(V_0 - V_2)\varphi_2, \tag{43}$$

где

$$\varphi_{ж} = -(1 - C_1 - C_2)\varphi_{тр} + \\ + \frac{C_1 C_2}{2}(k_2 - k_1)\left[\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)\frac{\rho_1}{\rho_0} - \left(1 + \frac{k_1}{2}\right)\frac{\rho_2}{\rho_0}\right] -$$

$$-(1 - C_1 - C_2)\times \\ \times\left[\frac{C_1 k_1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right) + \frac{C_2 k_2}{2}\frac{\rho_2}{\rho_0}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\right] -$$

$$-\left(1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2}\right)\left[C_1\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right) + C_2\frac{\rho_2}{\rho_0}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\right];$$

$$\varphi_{тр} = C_2\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right) + C_1\left(1 + \frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right) +$$

$$+(1 - C_1 - C_2)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$\varphi_1 = \frac{C_1 C_2}{2}\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)(k_1 - k_2) - C_1 C_2\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right) +$$

$$+C_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{k_1}{2}\right)(1 - C_1) + \frac{C_2}{2}(k_2 - k_1)\right] -$$

$$-C_1(1 - C_1 - C_2)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right);$$

$$\varphi_2 = \frac{C_1 C_2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2}\right)(k_2 - k_1) - C_1 C_2\left(1 + \frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right) + \\ + C_2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\left[\left(1 + \frac{k_2}{2}\right)(1 - C_2) + \frac{C_1}{2}(k_1 - k_2)\right] -$$

$$-C_2(1 - C_1 - C_2)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0} + \frac{k_2}{2}\right).$$

Отметим, что структура всех полученных формул такова, что индексы „1“ (твердые частицы) и индексы „2“ (газообразные частицы) входят в эти выражения симметрично и от перестановки индексов „1“ и „2“ формулы не изменяются.

Подчеркнем, что характеристические соотношения на акустических характеристиках представляют собой связь между полными дифференциалами функций p, V_0, V_1 и V_2 вдоль этих характеристик, но они не содержат дифференциалов концентраций C_1 и C_2.

Перейдем к определению характеристических соотношений на семействе $D = 0$. Поскольку это семейство двукратное, то на нем должно выполняться два условия. Эти условия проще всего получить из системы уравнений (31)-(34), положив в ней $D = 0$. Тогда из (32)-(34) получим такие равенства

$$\left(\frac{1 - C_1 - C_2}{\rho_0}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = B_2;\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_3;\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = B_4, \tag{44}$$

которые выполняются при каждом x = const. Исключив из (44) производную $\frac{\partial p}{\partial x}$, получим два следующих характеристических условия

$$(1 - C_1 - C_2)B_3 = B_2; \tag{45}$$

$$(1 - C_1 - C_2)B_4 = B_2, \tag{46}$$

выполняющихся на линиях x = const.

В развернутом виде уравнение (45) имеет вид

$$\left[(1 - C_1 - C_2)\left(1 + \frac{k_1}{2}\right) + 1 + \frac{C_1 k_1}{2} + \frac{C_2 k_2}{2}\right]dV_0 - \\ - \left[(1 - C_1 - C_2)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{k_1}{2}\right) + \frac{C_1 k_1}{2}\right]dV_1 - \\ - \frac{C_2 k_2}{2}dV_2 - \Omega_1 dt = 0, \tag{47}$$

где обозначено

$$\Omega_1 = (1 - C_1 - C_2)\left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)g\sin\alpha - \frac{\lambda\rho_{см}|V_{см}|V_{см}}{2D_{тр}\rho_0} - \\ - \frac{3}{8}\frac{(1 - C_2)C_{хт}}{R_1}|V_0 - V_1|(V_0 - V_1) - \\ - \frac{3}{8}\frac{C_2 C_{хв}}{R_2}|V_0 - V_2|(V_0 - V_2). \tag{48}$$

Уравнение (49) получается из уравнения (47) с заменой индекса „1“ на „2“ и наоборот, и имеет вид

$$\left[(1-C_1-C_2)\left(1+\frac{k_2}{2}\right)+1+\frac{C_1k_1}{2}+\frac{C_2k_2}{2}\right]dV_0-\frac{C_1k_1}{2}dV_1-$$

$$-\left[(1-C_1-C_2)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}+\frac{k_2}{2}\right)+\frac{C_2k_2}{2}\right]dV_2-\Omega_2 dt=0, \qquad (49)$$

где

$$\Omega_2=(1-C_1-C_2)\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}-1\right)g\sin\alpha-\frac{\lambda\rho_{см}|V_{см}|V_{см}}{2D_{тр}\rho_0}-$$

$$-\frac{3}{8}\frac{C_1C_{хт}}{R_1}|V_0-V_1|(V_0-V_1)-$$
$$-\frac{3}{8}\frac{(1-C_1)C_{хв}}{R_2}|V_0-V_2|(V_0-V_2). \qquad (50)$$

Характеристические условия (47), (49) выполняются вдоль линий $x = \text{const}$, так что содержащиеся в них дифференциалы dV_0, dV_1 и dV_2 означают приращения соответствующих функций по времени в каждом фиксированном сечении трубопровода.

В общем случае смеси жидкости с твердой и газообразной дискретными фазами имеется четыре семейства характеристик (семейство $D = 0$ является двукратным), вдоль каждого из которых выполняется некоторая связь между полными дифференциалами искомых функций dp, dV_0, dV_1 и dV_2.

Дифференциалы концентраций dC_1 и dC_2 в эти характеристические соотношения не входят. Значения концентраций C_1 и C_2 подлежат определению из решения дифференциальных уравнений (46), (47), которые по отношению к $\frac{\partial C_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, что позволяет осуществить их численное интегрирование с помощью конечно-разностных схем.

Таким образом, на базе выполненных исследований может быть сформулирован следующий **научный результат.** Впервые получены характеристические соотношения для системы дифференциальных уравнений, описывающих движение двухфазной и трехфазной смеси в трубопроводе в рамках раздельной модели течения.

Основываясь на вышесказанном, можно сделать **вывод**, что разработанный подход к расчету динамики многофазных потоков на базе классического метода характеристик открывает широкие возможности для проектирования глубоководных насосных установок, анализа их эксплуатационных режимов, а также является мощным инструментом в руках разработчиков программного обеспечения для этих целей.

Дальнейшим этапом работы является реализация разработанного подхода в виде программно-алгоритми-ческого комплекса для расчета глубоководных насосных гидроподъемов в рамках соответствующего метода, работа над которым ведется в настоящее время.

Список литературы

1. Кириченко Є.О. Наукове обґрунтування параметрів трубних систем для гідропідйому корисних копалин: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук/ Кириченко Євген Олексійович**;** Національна гірнича академія України. – Д., 2001.

2. Кириченко Е.А. Выбор и обоснование рациональных параметров глубоководной эрлифтной установки с учетом влияния питающей пневмосистемы: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук/ Кириченко Евгений Алексеевич**;** Ин-т геотехнической механики. – Д., 1989.

3. Кириченко В.Е. Обоснование параметров глубоководных эрлифтов с учетом переходных процессов: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук /Кириченко Владимир Евгениевич; Національна гірнича академія України. – Д., 2009.

4. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / Чарный И.А. – М.: Недра, 1975. – 296 с.

5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред / Нигматулин Р.И. – М.: Наука, 1987, ч. 1. – 464 с.

6. Картвелишвили Н.А. Динамика напорных трубопроводов / Картвелишвили Н.А. – М.: Энергия, 1979. – 224 с.

7. Махарадзе Л.И. Нестационарные процессы в напорных гидротранспортных системах и защита от гидравлических ударов / Махарадзе Л.И., Кирмелашвили Г.И. – Тбилиси: Мецниереба, 1986. – 152 с.

8. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах / Фокс Д.А. – М.: Энергоиздат, 1981. – 248 с.

9. Вуд А. Звуковые волны и их применение / Вуд А. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1934. – 284 с.

10. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения / Уоллис Г. – М.: Мир, 1972. – 440 с.

11. Разработка многофункциональной динамической модели многофазной среды применительно к эрлифтному гидроподъему / О.Г. Гоман, Е.А. Кириченко, В.Е. Кириченко, А.В. Романюков // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ: НГУ. – 2008. – №8. – С. 89–93.

12. Определение скорости распространения волн давления в элементах глубоководного эрлифтного гидроподъема / [О.Г. Гоман, Е.А. Кириченко, В.Е. Кириченко и др.] // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ: НГУ. – 2008. – №9. – С. 77–81.

Запропоновано математичне забезпечення для розрахунку нестаціонарних багатофазних течій в елементах насосних та ерліфтних гідропідйомів мінеральної сировини з дна Світового океану. Отримано характеристичні співвідношення для системи диференційних рівнянь, що описують рух двофазної та трьохфазної суміші в трубопроводі в межах роздільної моделі течії. Розроблений підхід до розрахунку динаміки багатофазних потоків відкриває широкі можливості для проектування глибоководних насосних установок та аналізу їх експлуатаційних режимів.

Ключові слова: *гідросуміш, гідропідйом, насосний гідропідйом, тверді корисні копалини, глибоководний видобуток*

The mathematical basis for the calculation of nonstationary multiphase flows in the pump- and airlift-based deep-sea hydrohoist is suggested. The authors obtained characteristic relations for the system of differential equations describing the motion of a two-phase and three-phase mixture in a pipeline using a new separate flow model. The approach to calculating the dynamics of multiphase flows opens up opportunities for designing deep-water pumping systems and analysis of their operational modes.

Keywords: *slurry, hydrohoist, pump-based hydrohoist, solid minerals, deep-sea mining*

Рекомендовано до публікації докт. техн. наук В.І. Самусею. Дата надходження рукопису 11.03.11

Національний гірничий університет пропонує інноваційний проект

КОНТРОЛЬ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЕНЕРГІЇ ВИРОБНИЧИМИ ПІДРОЗДІЛАМИ ПІДПРИЄМСТВА

Автори: С.І. Випанасенко, д-р техн. наук, проф., Н.С. Дрешпак, канд. техн. наук

Контроль здійснюється за рахунок зіставлення витрат енергії в структурних підрозділах підприємства з результатом її використання (у першу чергу з кількістю виробленої продукції). Це дозволяє контролювати значення питомих витрат енергії (витрат на одиницю продукції), які при нераціональному використанні енергії підрозділом (або технологічною лінією) зростають.

Контроль дозволяє виявити відхилення режимів роботи обладнання від оптимальних значень, що відповідають умові енергозбереження. Виявляються режими, де обладнання працює не завантаженим (з низьким коефіцієнтом корисної дії), коли обладнання несвоєчасно вимикають, не здійснюють технічне обслуговування. У процесі виробництва продукції виявлення цих недоліків можливе тільки при безперервному, кропіткому нагляді за енергоспоживанням, що здійснює керівництво підрозділу. У запропонованому варіанті такий нагляд не є необхідним. Контроль здійснюється за результатами аналізу ефективності використання енергії. Для цього розроблена комп'ютерна програма, що встановлює планові показники енергоефективності і зіставляє їх із фактичними значеннями. За результатами зіставлення роблять висновок про перевищення планових значень енергоспоживання, або про економію енергії.

Застосування програми дає змогу в певний проміжок часу навести порядок з енергоспоживанням безпосередньо на робочому місці, і за рахунок цього знизити значення питомих витрат енергії. Контроль може бути застосованим також для аналізу ефективності використання енергії підприємством у цілому.

У поєднанні із функцією управління енерговикористанням економічна ефективність контролю складає 10-15% від загальної вартості енергії, що споживається контрольованим об'єктом.

Вартість адаптації програми до умов виробництва, її інсталяції та авторського супроводу розробки в період уведення в дію складає 100 тисяч грн.

Контакти: Державний ВНЗ „Національний гірничий університет", Центр енергозбереження та енергоменеджменту

тел.: +38 (0562) 47 39 95, e-mail VypanasenkoS@nmu.org.ua